Übungsblatt 6 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 05. Dezember 2011, 8:15 Uhr. Bis Freitag 02. Dezember 2011 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *Körper und komplexe Zahlen*

Sei K eine Körpererweiterung von $\mathbb{R}$, d.h. $(K, +, \cdot)$ ist Körper, $\mathbb{R} \subset K$, und die Operationen von K setzen die von $\mathbb{R}$ fort. Außerdem gebe es ein $j \in K$ mit $j^2 = -1$. Zeigen Sie:

(i) $L := \{z \in K \mid \textit{es gibt } a, b \in \mathbb{R} \textit{mit } z = a + b \cdot j\}$ *ist Unterkörper von K und es gilt $\mathbb{R} \subset L \subset K$.*

(ii) L ist (als Ring) isomorph zu $\mathbb{C}$.

Aufgabe 2 *Komplexe Zahlen*

(i) [1 Punkt] Berechnen Sie im Körper der komplexen Zahlen i^{-2011}.

(ii) [3 Punkt] Lösen Sie über $\mathbb{C}$ das folgende Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & i & 30a - 7 \\ -i & 7i & -5a + 7i \end{array}\right).$$

Aufgabe 3 *Ringe und Körper*

(i) [2 Punkte] Lösen Sie in den Körpern $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \bar{2}x + y &= \bar{0} \\ x + \bar{2}y &= \bar{1}. \end{aligned}$$

(ii) [2 Punkte] Lösen Sie in $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ die Gleichung $x^2 - \bar{1} = \bar{0}$.

Aufgabe 4 *Ringe und Körper*

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement.

(i) *Ist Menge $R[t]$ der Polynome mit Koeffizienten aus R ein ein Ring oder ein Körper? Welche Axiome sind erfüllt?*

(ii) *Zeigen Sie, wenn R nullteilerfrei ist, so folgt: Für $f, g \in R[t]$ mit* $\deg f = n$ *und* $\deg g = m$ *gilt* $\deg(f \cdot g) = n + m$.

(iii) *Zeigen Sie, dass die Aussage von (ii) nicht gilt, falls R nicht nullteilerfrei ist, d.h. finden Sie einen nicht nullteilerfreien Ring und Polynome $f, g \in R[t]$ mit* $\deg f = n$, $\deg g = m$ *und* $\deg(f \cdot g) < n + m$.