Übungsblatt 7 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 12. Dezember 2011, 8:15 Uhr. Bis Freitag 09. Dezember 2011 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *Vektorräume und Basen*

Im $\mathbb{R}$-*VR* $\mathbb{R}^4$ *seien folgende Vektoren gegeben*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}, \quad v_6 = \begin{pmatrix}2\\4\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Man beweise:

(i) [1 Punkt] $B_1 := \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *ist eine Basis.*

(ii) [1 Punkt] $B_2 := \{v_5, v_2, v_3, v_4\}$ *ist eine Basis.*

(iii) [1 Punkt] $B_3 := \{v_1, v_6, v_3, v_4\}$ *ist eine Basis.*

(iv) [1 Punkt] $B_4 := \{v_5, v_6, v_3, v_4\}$ *ist keine Basis.*

Aufgabe 2 *[4 Punkte] Vektorraum der Polynome*

Zeigen Sie, dass der Vektorraum der Polynome über einem Körper unendlichdimensional ist.

Aufgabe 3 *[4 Punkte] Rang von Matrizen*

Sei $A \in M(m \times n; K)$ *mit* Zeilenrang $A = 1$. *Zeigen Sie, (ohne Zuhilfenahme des Satzes über die Gleicheit von Zeilenrang und Spaltenrang) dass auch* Spaltenrang $A = 1$ *gilt.*

Aufgabe 4 *Körper, Vektorräume und Charakteristik*

(i) [3 Punkte] Ist K *ein Körper mit* $\operatorname{char} K = p > 0$, *so enthält* K *einen zu* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *isomorphen Körper und kann somit als* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$-*Vektorraum aufgefasst werden.*

(ii) [1 Punkt] Zeigen Sie: Ist K *ein endlicher Körper mit* $\operatorname{char} K = p$, *so hat* K *genau* p^n *Elemente, wobei* $n = \dim_{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} K$.