Übungsblatt 8 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 2. Januar 2012, 8:15 Uhr. Bis Freitag 16. Dezember 2011 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *Induktive Ordnungen und Zornsches Lemma*

Zur Erinnerung: Eine partielle Ordnung $\prec$ ist eine Relation $\prec$ auf einer Menge P, die reflexiv, transitiv und antisymmetrisch ($a \prec b \wedge b \prec a \Rightarrow a = b$) ist. Ist $\prec$ eine partielle Ordnung, so heißt $(P, \prec)$ eine partiell geordnete Menge.

Eine partiell geordnete Menge $(P, \prec)$ heißt induktiv geordnet, wenn jede total geordnete Teilmenge $K \subset P$ eine obere Schranke in P besitzt. Dabei heißt K total geordnet, wenn die Elemente von K paarweise vergleichbar sind. Eine obere Schranke von K ist ein Element $p \in P$ mit $k \prec p$ für alle $k \in K$. Untersuchen Sie, ob folgende partielle Ordnungen induktiv geordnet sind.

(i) *[1 Punkt]* $(\mathbb{R}, \leq)$*, d. h. $\prec$ aus der Definition ist hier das bekannte $\leq$ für reelle Zahlen.*

(ii) *[1 Punkt]* $([0,1], \leq)$,

(iii) *[2 Punkte]* $(P, \prec)$ *konstruiert wie folgt: Sei V ein K-Vektorraum. Sei P die Menge der linear unabhängigen Teilmengen von V. Wir ordnen P durch Inklusion, d. h. für $U_1, U_2 \in P$ ist $U_1 \prec U_2$ genau dann wenn $U_1 \subset U_2$.*

Das Zornsche Lemma sagt nun, ist $(P, \prec)$ induktiv geordnet und $P \neq \emptyset$, dann gibt es ein maximales Element (also ein $m \in P$ mit $m \prec p \Rightarrow m = p$). In unserem Fall heißt das, dass es in V eine maximal linear unabhängige Teilmenge von V und damit eine Basis gibt.

Aufgabe 2 *[4 Punkte] Basen*

Berechnen Sie mit der Methode der elementaren Umformungen eine Basis für $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \subseteq \mathbb{R}^5$*. Dabei sei*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_5 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 *Basen*

In den folgenden Beispielen ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \in V$. Wählen Sie eine maximal linear unabhängige Teilfamilie von $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ aus und ergänzen Sie sie zu einer Basis von V.

(i) [2 Punkte] $V = \mathbb{R}^4$ *und*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) [2 Punkte] $V = \mathbb{R}[t]$ *und*

$$v_1 = t^2, \quad v_2 = t^6 + t^5, \quad v_3 = t^2 + 2t, \quad v_4 = 3t^2 + 4t + 5, \quad v_5 = t^2 - 1.$$

Hinweis: Man benutzte, dass $\{t^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ *eine Basis von* $\mathbb{R}[t]$ *ist und führe das Problem auf ein Problem des* $\mathbb{R}^7$ *zurück. Man überlege sich wie man ein Monom als Spaltenvektor des* $\mathbb{R}^n$ *darstellen kann.*

Aufgabe 4 *[4 Punkte] Lineare Abbildungen, Kern und Bild*

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ *sei durch* $f(x) = A \cdot x$ *gegeben, wobei*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie Basen von $\operatorname{Ker} f$ *und* $\operatorname{Im} f$.