Übungsblatt 9 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens Mittwoch 11. Januar 2012, 8:30 Uhr.

Aufgabe 1 *[4 Punkte] Lineare Abbildungen*

Sei $f : V \to W$ *surjektiv und linear und* $U \subset V$ *ein Unterraum mit* $V = \ker f \oplus U$. *Zeigen Sie, dass dann* $f_{|U}$ *ein Isomorphismus ist. Dabei Ist* $f_{|U}$ *die Einschränkung von* f *auf* U.

Aufgabe 2 *Lineare Abbildungen*

(i) [2 Punkte] Für $f, g \in Hom_K(V, W)$ *gilt:*

$$\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g, \qquad \ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$$

(ii) [2 Punkte] Für lineare Abbildungen $f : U \to V$, $g : V \to W$ *gilt*

$$\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Im} g, \qquad \ker f \subset \ker(g \circ f).$$

Zeigen Sie diese Beziehungen und geben Sie Beispiele an, in denen die Unterraum-Beziehung „$\subset$*“echte Teilmenge ist.*

Aufgabe 3 *Lineare Abbildungen und direkte Summe*

(i) [2 Punkte] Finden Sie eine lineare Abbildung $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *mit* $p^2 (:= p \circ p) = p$ *und* $\dim \operatorname{Im} p = 2$.

(ii) [2 Punkte] Sei $p : V \to V$ *linear und* $p^2 = p$ *(solche* p *heißen „Projektionen“). Finden Sie* $U, W \subset V$ *mit* $V = U \oplus W$, $p_{|U} = 0$ *und* $p_{|W} = id_W$ *(die identische Abbildung auf* W*).*

Aufgabe 4 *Multiplikation von Matrizen*

(i) [2 Punkte] Berechnen Sie A^2, A^3 *und* A^4 *für*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) [2 Punkte] Sei $A \in M(n \times n, K)$ *und* $a_{ij} = 0$ *für alle Paare* (i, j) *mit* $j \leq i$. *Zeigen Sie, dass dann* $A^n = 0$ *ist.*