Übungsblatt 10 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 23. Januar 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 20. Januar 2012 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *[4 Punkte] Quotientenräume*

Sei U ein Untervektorraum von V und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung mit $f(U) \subset U$. Zeigen Sie, dass es genau eine lineare Abbildung $\bar{f} : V/U \to V/U$ gibt mit der Eigenschaft $\pi \circ f = \bar{f} \circ \pi$. Dabei ist $\pi : V \to V/U$ die kanonische lineare Abbildung. Tipp: Man benutze Satz 2.2.7 aus dem Buch von Gerd Fischer.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & V \arrow[d, "\pi"] \\ V/U \arrow[r, dashed, "\bar{f}"'] & V/U \end{tikzcd}$$

Aufgabe 2 *Darstellende Matrizen*

Sei $V \subset Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der von $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ aufgespannte Unterraum, mit $v_1(t) = \cos(t)$, $v_2(t) = \sin(t)$, $v_3(t) = e^t$. $\mathscr{B}$ ist eine Basis von V (das brauchen Sie nicht zu zeigen). Sei $D : V \to Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $D(f) = f'$ (die Ableitung von f).

(i) Zeigen Sie, dass D den Vektorraum V in sich abbildet, also $D(V) \subset V$.

(ii) Berechnen Sie $M_{\mathscr{B}}(D)$.

(iii) Wie sieht (analog) $M_{\mathscr{B}'}(D)$ aus, für $\mathscr{B}' = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5)$ mit $w_1(t) = 1$, $w_2(t) = t$, $w_3(t) = e^t$, $w_4(t) = e^{2t}$, $w_5(t) = te^t$?

Aufgabe 3 *[4 Punkte] Darstellende Matrizen*

Finden Sie $M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})$, wobei $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ Basen von $\mathbb{R}^3$ sind mit

$$\mathscr{A} = \big((1,1,0), (-1,1,1), (0,1,2)\big),$$
$$\mathscr{B} = \big((2,1,1), (0,0,1), (-1,1,1)\big).$$

Aufgabe 4 *[4 Punkte] Darstellende Matrizen*
Seien V *und* W *endlichdimensionale* K*-Vektorräume mit* $V = V_1 \oplus V_2$, $W = W_1 \oplus W_2$ *sowie* $F : V \to W$ *linear mit* $F(V_i) \subset W_i$ *für* $i = 1, 2$. *Zeigen, dass es Basen* $\mathscr{A}$ *von* V *und* $\mathscr{B}$ *von* W *gibt mit*

$$M^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

wobei $A \in M(\dim W_1 \times \dim V_1; K)$, $B \in M(\dim W_2 \times \dim V_2; K)$.