Übungsblatt 11 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 30. Januar 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 27. Januar 2012 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *[4 Punkte] Darstellende Matrizen*

Für

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \text{ und } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sei $a \times x$ definiert durch

$$a \times x := \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für festes a die Abbildungen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) := a \times x$, $g(x) := x \times a$ linear sind, und geben Sie $M_{\mathscr{B}}(f)$ und $M_{\mathscr{B}}(g)$ an, wobei $\mathscr{B}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 2 *Inverse Matrix*

(i) [2 Punkte] Seien $A, B \in M(n \times n; K)$ und $A \cdot B = E_n$. Zeigen Sie, dann gilt auch $B \cdot A = E_n$, d.h. $B = A^{-1}$.

(ii) [2 Punkte] Berechnen Sie mit Hilfe von Teil (i) A^{-1}, mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 3; \mathbb{R}).$$

Aufgabe 3 *Matrizen*

Im folgenden seien alles Matrizen aus $M(n \times n; K)$.

(i) *[2 Punkte] Aus* $AB = BA$ *folgt* $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ *und* $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$. *Was ist* $(A+B)^3$*?*

(ii) *[2 Punkte]* A *heißt nilpotent, falls es ein* $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *gibt mit* $A^n = 0$. *Zeigen Sie, dass mit* A *und* B *auch* $A+B$ *und* $A \cdot B$ *nilpotent sind, falls* $AB = BA$.

Aufgabe 4 *[4 Punkte] Lineare Abbildungen, Basen und homogene Gleichungssysteme*

Sei N *ein beliebiger Unterverktorraum des* K^n. *Zeigen Sie, dass es eine Matrix* $A \in M(n \times n; K)$ *gibt, so dass* N *die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems* $A \cdot x = 0$ *ist. Tipp: Arbeiten Sie mit linearen Abbildungen und passend gewählten Basen des* K^n.