Übungsblatt 12 zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 6. Februar 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 3. Februar 2012 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *[4 Punkte] Transformationsmatrizen*

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *die lineare Abbildung die gegeben ist durch* $f(x) = A \cdot x$, *mit*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Seien $\mathscr{K}$ *bzw.* $\mathscr{K}'$ *die kanonischen Basen von* $\mathbb{R}^3$ *bzw.* $\mathbb{R}^2$. $\mathscr{A} = (v_1, v_2, v_3)$ *und* $\mathscr{B} = (w_1, w_2)$ *seien Basen von* $\mathbb{R}^3$ *bzw.* $\mathbb{R}^2$ *mit*

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Transformationsmatrizen $T^{\mathscr{A}}_{\mathscr{K}}$ *und* $T^{\mathscr{K}'}_{\mathscr{B}}$ *und, mit Hilfe der Transformationsformel, die Matrix* $T^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(f)$.

Aufgabe 2 *Transformationsmatrizen und Äquivalenzrelationen*

Zeigen Sie, dass

(i) *[2 Punkte] die Ähnlichkeit auf der Menge der* $m \times n$*-Matrizen über* K *und*

(ii) *[2 Punkte] die Äquivalenz auf der Menge der* $n \times n$*-Matrizen über* K

Äquivalenzrelationen sind.

Aufgabe 3 *[4 Punkte] Inverse Matrix*

(i) *Zeigen Sie:*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2 \times 2; K) \text{ ist invertierbar} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0.$$

Berechnen Sie in diesem Fall die Inverse von A.

(ii) *Berechnen Sie mit dem Verfahren aus 2.7.5 die Inverse zu*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4 *[4 Punkte]Determinanten*

Zeigen Sie durch Induktion über n, *dass für beliebige* $x_1, \ldots, x_n \in K$ *gilt:*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & \ldots & \ldots & \ldots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_j - x_i).$$

Das ist die so genannte Vandermondesche Determinante.