Zusatzzettel zur Vorlesung Lineare Algebra I

Wintersemester 2011/12

Dozent: Prof. Dr. Ehrhard Behrends
Assistent: Patrik Marschalik
Tutoren: Nina Loginova, Christoph Böhler, Frederik Garbe

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/LineareAlgebraI.php

Abgabe bis spätestens 13. Februar 2012, 8:30 Uhr. Bis Freitag 10. Februar 2012 in den Tutorenfächern, am Montag nur vor der Vorlesung.

Aufgabe 1 *[4 Punkte] Determinanten und Geraden*

Seien v, w zwei verschiedene Punkte des K^2 und $L \subset K^2$ die Gerade durch v und w. Dann gilt:

$$L = \left\{ (x_1, x_2) \in K^2 : \det \begin{pmatrix} 1 & v_1 & v_2 \\ 1 & w_1 & w_2 \\ 1 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = 0 \right\}.$$

Aufgabe 2 *[4 Punkte] Elementarmatrizen*

Stellen Sie (in $GL(3;\mathbb{R})$) die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

als Produkt von Elementarmatrizen dar.

Aufgabe 3 *[4 Punkte] Ringisomorphismus*

Sei $S \in GL(n;K)$. Zeigen Sie, dass

$$\varphi : M(n;K) \to M(n;K)$$
$$A \mapsto S \cdot A \cdot S^{-1}$$

ein Ringisomorphismus ist.

Aufgabe 4 *geometrische Eigenschaften*

Sei $A \in M(n \times n;K)$, $S \in GL(n;K)$ und $B = SAS^{-1}$. Dann haben die durch A bzw. B gegebenen linearen Abbildungen f_A ($f_A(x) = A \cdot x$) bzw. f_B ($f_B(x) = B \cdot x$) die gleichen „geometrischen“ Eigenschaften:

(i) [2 Punkte] Zeigen Sie für $\lambda \in K$:

$$\text{es gibt } x \in K^n \setminus \{0\} \text{ mit } f_A(x) = \lambda\, x \Leftrightarrow \text{es gibt } y \in K^n \setminus \{0\} \text{ mit } f_B(y) = \lambda\, y$$

(ii) [2 Punkte] Wie verhalten sich $\operatorname{Im} f_A$ und $\operatorname{Im} f_B$ zueinander? Bzw. $\ker f_A$ und $\ker f_B$?