Aufgabe 1 (4 Punkte)
Das Krypton-Isotop ^{85m1}Kr hat eine Halbwertzeit von 4,5 Stunden; d.h., innerhalb von 4,5 Stunden halbiert sich die Anzahl der vorhandenen Teilchen. Wie lange dauert es – ein exponentielles Zerfallsgesetz vorausgesetzt – bis nur noch 17% der Teilchen übrig sind?

Lösung Exponentieller Zerfall lässt sich für geeignete $\lambda, c \in \mathbb{R}$ durch die Funktion $f(t) = ce^{\lambda t}$ modellieren.

a) Zuerst berechnet man λ. Nach Voraussetzung gilt

$$\begin{aligned} & f(4{,}5) = 0{,}5 f(0) & \\ \Leftrightarrow \quad & ce^{\lambda 4{,}5} = 0{,}5 ce^{\lambda 0} & \Big| \, c \text{ kürzen} \\ \Leftrightarrow \quad & e^{\lambda 4{,}5} = 0{,}5 & \Big| \, \text{logarithmieren} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda 4{,}5 = \ln(0{,}5) & \Big| \, \text{durch } 4{,}5 \text{ teilen} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda = \frac{\ln(0{,}5)}{4{,}5} & \end{aligned}$$

b) Gesucht ist der Zeitpunkt $t \geq 0$ mit

$$\begin{aligned} & f(t) = 0{,}17 f(0) & \\ \Leftrightarrow \quad & ce^{\lambda t} = 0{,}17 ce^{\lambda 0} & \Big| \, c \text{ kürzen} \\ \Leftrightarrow \quad & e^{\lambda t} = 0{,}17 & \Big| \, \text{logarithmieren} \\ \Leftrightarrow \quad & \lambda t = \ln(0{,}17) & \Big| \, \text{durch } \lambda \text{ teilen} \\ \Leftrightarrow \quad & t = \frac{\ln(0{,}17)}{\lambda} & \Big| \, \lambda \text{ einsetzen} \\ \Leftrightarrow \quad & t = \frac{\ln(0{,}17)}{\frac{\ln(0{,}5)}{4{,}5}} & \\ \Leftrightarrow \quad & t = \frac{\ln(0{,}17)4{,}5}{\ln(0{,}5)} & \end{aligned}$$

Antwort: Es dauert $\frac{\ln(0{,}17)4{,}5}{\ln(0{,}5)}$ Stunden.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades für $f(x) = \ln(1+x)$ bei $x_0 = 0$ und berechnen Sie damit einen Näherungswert für $\ln(0{,}95)$.

Lösung Es gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) & f(0) &= \ln(1+0) = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} & f'(0) &= \frac{1}{1+0} = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} & f''(0) &= -\frac{1}{(1+0)^2} = -1. \end{aligned}$$

Für das Taylorpolyom zweiten Grades $p_2(x)$ gilt

$$\begin{aligned}
p_2(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \\
&= 0 + 1x + \frac{-1}{2}x^2 \\
&= x - \frac{1}{2}x^2.
\end{aligned}$$

Es verbleibt noch $\ln(0{,}95)$ zu approximieren. Man berechnet

$$\begin{aligned}
\ln(0{,}95) &= \ln(1 + (-0{,}05)) = f(-0{,}05) \\
&\approx p_2(-0{,}05) = -0{,}05 - \frac{1}{2}(-0{,}05)^2 = -0{,}05125
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zeigen sie die folgenden Aussagen mit Induktion:

a) $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{(n+1)} - 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$,

b) $n^2 + n$ ist gerade für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

a)
  a) Induktionsanfang: $n = 0$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = \sum_{i=0}^{0} 2^i = 2^0 = 1 = 2 - 1 = 2^{0+1} - 1$$

  b) Induktionsvoraussetzung: Es gelte für $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{(n+1)} - 1$$

  c) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= (\sum_{i=0}^{n} 2^i) + 2^{n+1} && \mid \text{Induktionsvoraussetzung benutzen} \\
&= (2^{n+1} - 1) + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} + 2^{n+1} - 1 \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

b) Eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist genau dann gerade, wenn $n = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$ gilt.
  a) Induktionsanfang: $n = 1$ (man kann auch mit $n = 0$ beginnen)

$$n^2 + n = 1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

b) Induktionsvoraussetzung: Es gelte für $n \in \mathbb{N}$, dass $n^2 + n$ gerade ist, also

$$n^2 + n = 2k$$

für ein $k \in \mathbb{N}$

c) Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 + (n+1) &= (n^2 + 2n + 1) + (n + 1) \\
&= (n^2 + n) + 2n + 2 && \mid \text{Induktionsvoraussetzung benutzen} \\
&= 2k + 2n + 2 \\
&= 2(k + n + 1)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Beim Verlauf einer chemischen Reaktion $A + C \to D + C$ mit drei Komponenten bezeichne $y(t)$ die Konzentration des Ausgangsstoffes C zur Zeit t. Der Verlauf der Reaktion kann dann durch die Differentialgleichung

$$y'(t) = \frac{\alpha(\beta - y(t))}{\gamma}$$

beschrieben werden.

a) Wie lautet die Lösungsgesamtheit dieser Gleichung?

b) Es sei (in geeigneten Einheiten gemessen) $\alpha = 2$, $\beta = 6$ und $\gamma = 3$. Die Konzentration zum Zeitpunkt $t = 1$ sei $y(1) = 10$. Wie groß war die Anfangskonzentration $y(0)$?

Hinweis: $y(t) = e^{rt} - \frac{d}{r}$ *löst* $y' = ry + d$.

Lösung

a) Es gilt

$$\begin{aligned}
y'(t) &= \frac{\alpha(\beta - y(t))}{\gamma} \\
&= -\frac{\alpha}{\gamma} y(t) + \frac{\alpha\beta}{\gamma}
\end{aligned}$$

Man setzt $r = -\frac{\alpha}{\gamma}$ und $d = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ und erhält unter Verwendung des Skripts (bzw. des Hinweises)

$$\begin{aligned}
y(t) &= ce^{-\frac{\alpha}{\gamma}t} - \frac{\frac{\alpha\beta}{\gamma}}{-\frac{\alpha}{\gamma}} && \mid \frac{\alpha}{\gamma} \text{ kürzen} \\
&= ce^{-\frac{\alpha}{\gamma}t} + \beta
\end{aligned}$$

wobei $c \in \mathbb{R}$.

b) Nach Voraussetzung gilt $\alpha = 2$, $\beta = 6$, $\gamma = 3$ und für $t = 1$ $y(1) = 10$ also

$$
\begin{aligned}
& y(t) && = ce^{-\frac{\alpha}{\gamma}t} + \beta \\
\Leftrightarrow \quad & 10 && = ce^{-\frac{2}{3}\cdot 1} + 6 && \mid \text{6 subtrahieren und Gleichung umdrehen} \\
\Leftrightarrow \quad & ce^{-\frac{2}{3}} && = 10 - 6 && \mid \text{durch } e^{-\frac{2}{3}} \text{ teilen} \\
\Leftrightarrow \quad & c && = \frac{4}{e^{-\frac{2}{3}}}
\end{aligned}
$$

Das bedeutet

$$
\begin{aligned}
& y(t) && = ce^{-\frac{\alpha}{\gamma}t} + \beta \\
\Leftrightarrow \quad & y(0) && = \frac{4}{e^{-\frac{2}{3}}} e^{-\frac{\alpha}{\gamma}\cdot 0} + 6 \\
\Leftrightarrow \quad & y(0) && = \frac{4}{e^{-\frac{2}{3}}} + 6
\end{aligned}
$$

Antwort: Die Anfangskonzentration war $y(0) = \frac{4}{e^{-\frac{2}{3}}} + 6$.

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Das Gebiet A in der Ebene sei von links beschränkt durch die y-Achse, von rechts durch die Gerade $x = 5$, von oben durch die Funktion $f(x) = \frac{5}{2}\pi\cos(\frac{5}{2}\pi x) + 130$ und von unten durch die Funktion $g(x) = -x^4 + 12x^3 - 39x^2 + 40x + 7$. Berechnen Sie die Fläche von A.
Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $0 \leq g(x) \leq f(x)$ für $x \in [0, 5]$ gilt.

Lösung Aufgrund des Hinweises genügt es die beiden Integrale

a) $A_f = \int_0^5 f(x)dx$ b) $A_g = \int_0^5 g(x)dx$

zu berechnen. Es gilt dann $F_A = F_f - F_g$. Es gilt

a)

$$
\begin{aligned}
F_f &= \int_0^5 f(x)\,dx \\
&= \int_0^5 \frac{5}{2}\pi\cos(\frac{5}{2}\pi x) + 130\,dx \\
&= [\sin(\frac{5}{2}\pi x) + 130x]_0^5 \\
&= \sin(\frac{5}{2}\pi 5) + 130 \cdot 5 \\
&= 1 + 650 \\
&= 651
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
F_g &= \int_0^5 g(x)\,dx \\
&= \int_0^5 -x^4 + 12x^3 - 39x^2 + 40x + 7\,dx \\
&= [-\frac{1}{5}x^5 + \frac{12}{4}x^4 - \frac{39}{3}x^3 + \frac{40}{2}x^2 + 7x]_0^5 \\
&= [-\frac{1}{5}x^5 + 3x^4 - 13x^3 + 20x^2 + 7x]_0^5 \\
&= -\frac{1}{5}\cdot 5^5 + 3\cdot 5^4 - 13\cdot 5^3 + 20\cdot 5^2 + 7\cdot 5 \\
&= -5^4 + 3\cdot 5^4 - 13\cdot 5^3 + 4\cdot 5^3 + 7\cdot 5 \\
&= 2\cdot 5^4 - 9\cdot 5^3 + 7\cdot 5 \\
&= 5\cdot(2\cdot 5^3 - 9\cdot 5^2 + 7) \\
&= 5\cdot(2\cdot 125 - 9\cdot 25 + 7) \\
&= 5\cdot(250 - 225 + 7) \\
&= 5\cdot 32 \\
&= 160
\end{aligned}
$$

Zusammen ergibt sich für die Fläche des Gebiets A also

$$
\begin{aligned}
F_A &= F_f - F_g \\
&= 651 - 160 \\
&= 491
\end{aligned}
$$

Ende der Beispiellösungen