Aufgabe 1 (4 Punkte)
Von einer radioaktiven Substanz zerfallen pro Sekunde p %. Wie lange dauert es, bis ein Viertel zerfallen ist, ein exponentielles Zerfallsgesetz vorausgesetzt?

Lösung Sei $M(t)$ die Masse zum Zeitpunkt t, nach Voraussetzung gilt

$$M(t) = M(0)(\frac{p}{100})^t = M(0)e^{\ln(\frac{p}{100})t}.$$

Gesucht ist der Zeitpunkt t mit

$$M(t) = \frac{3}{4}M(0)$$

also

$$\begin{array}{lll} & M(0)e^{\ln(\frac{p}{100})t} = \frac{3}{4}M(0) & \Big| \text{ M(0) kürzen} \\ \Leftrightarrow & e^{\ln(\frac{p}{100})t} = \frac{3}{4} & \Big| \ln \\ \Leftrightarrow & \ln(\frac{p}{100})t = \ln(\frac{3}{4}) & \Big| : \ln(p/100) \\ \Leftrightarrow & t = \frac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{p}{100})} & \end{array}$$

Antwort: Es dauert $\frac{\ln(\frac{3}{4})}{\ln(\frac{p}{100})}$ Sekunden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos 2\alpha \, d\alpha,$

b) $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-17x} \, dx.$

Lösung

a)

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \cos 2\alpha \, d\alpha &= [\frac{1}{2}\sin(2\alpha)]_{-\frac{\pi}{4}}^{3\pi} \\ &= \frac{1}{2}(\sin(6\pi) - \sin(-\frac{\pi}{2})) \\ &= \frac{1}{2}(0+1) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Für $a \geq 0$ berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} \int_0^a e^{-17x} \, dx &= [-\frac{1}{17}e^{-17x}]_0^a \\ &= -\frac{1}{17}(e^{-17a} - 1) \\ &= -\frac{1}{17}e^{-17a} + \frac{1}{17}. \end{aligned}$$

Für das uneigentliche Integral folgt dann

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-17x}\,dx &= \lim_{a\to\infty}\int_0^a e^{-17x}\,dx \\ &= \lim_{a\to\infty}(-\frac{1}{17}e^{-17a}+\frac{1}{17}) \\ &= \frac{1}{17}.\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Die Leistung (= aufgewandte Energie pro Zeiteinheit) einer Fledermaus in Abhängigkeit von ihrer Fluggeschwindigkeit v berechnet sich zu

$$P(v) = \frac{M^{42}}{8\psi qv} + \frac{1}{4}\psi jv^5,$$

wo M das Gewicht der Fledermaus, ψ die Dichte der Luft und q und j zwei von der Gestalt der Fledermaus abhängende positive Konstanten sind. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v_0, die die Leistung minimiert.

Lösung Gesucht ist ein (positiver) lokaler Tiefpunkt der Funktion $P(v)$. Dafür benötigen wir die Ableitungen ersten und zweiten Grades. Es gilt

- $P(v) = \frac{M^{42}}{8\psi q}v^{-1} + \frac{1}{4}\psi jv^5$
- $P'(v) = -\frac{M^{42}}{8\psi q}v^{-2} + \frac{5}{4}\psi jv^4$
- $P''(v) = \frac{2M^{42}}{8\psi q}v^{-3} + 5\psi jv^3$

Nach Vorlesung ist die notwendige Bedingung für einen lokalen Tiefpunkt

$$\begin{aligned} & P'(v_0) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & -\frac{M^{42}}{8\psi q}v_0^{-2} + \frac{5}{4}\psi jv_0^4 &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{5}{4}\psi jv_0^6 &&= \frac{M^{42}}{8\psi q} \\ \Leftrightarrow\quad & v_0^6 &&= \frac{\frac{M^{42}}{8\psi q}}{\frac{5}{4}\psi j} \\ \Leftrightarrow\quad & v_0 &&= \sqrt[6]{\frac{\frac{M^{42}}{8\psi q}}{\frac{5}{4}\psi j}} \\ \Leftrightarrow\quad & v_0 &&= \sqrt[6]{\frac{M^{42}}{10\psi^2 qj}} \end{aligned}$$

Da q, j, M, ψ und v_0 allesamt positiv sind folgt $P''(v_0) > 0$ und v_0 erfüllt damit auch die hinreichende Bedingung für einen lokalen Tiefpunkt. Des weiteren ist v_0 die einzige positive Lösung von $P'(v) = 0$, was die Eindeutigkeit des Tiefpunktes klärt.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Folgen

a) $a_n = \frac{3n^4-42n^3+7}{-n^4+25n^2}$

b) $b_n = \sum_{i=0}^{n}(\frac{2}{3})^i$

Lösung

a) Kürzen durch n^4 ergibt

$$a_n = \frac{3n^4 - 42n^3 + 7}{-n^4 + 25n^2} = \frac{3 - 42n^{-1} + 7n^{-4}}{-1 + 25n^{-2}}$$

und daher

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3 - 42n^{-1} + 7n^{-1}}{-1 + 25n^{-2}} = \frac{3 - 42\cdot 0 + 7\cdot 0}{-1 + 25\cdot 0} = -3$$

nach Satz II.1 aus dem Skript.

b) Nach Vorlesung gilt für die geometriche Reihe mit $|q| < 1$ $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ und da $\frac{2}{3} < 1$ ist, folgt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \sum_{i=0}^{\infty}(\frac{2}{3})^i = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Eine Algenkolonie vermehre sich proportional zu ihrer Größe, während gleichzeitig ein Fischschwarm sich von ihr ernährt. Wenn man mit $K(t)$ die Größe der Kolonie (in m^2) zum Zeitpunkt t (in Tagen) bezeichnet, kann man ihr Wachstum durch

$$K'(t) = \frac{3}{2}K(t) - F$$

beschreiben. Wobei die positive Konstante F von Art und Größe des Fischschwarms abhängt. Berechnen Sie die Größe der Algenkolonie nach 4 Tagen bei einer Anfangsgröße von 7 m^2 und $F = 9$.
Hinweis: $e^6 \approx 403.43$

Lösung Nach Vorlesung wird das Anfangswertproblem $y'(t) = ry(t) + d$ durch $y(t) = ce^{rt} - \frac{d}{r}$ gelöst, wobei c von $y(0)$ abhängt. Wir setzen $r = \frac{3}{2}$ und $d = -F$ und erhalten als Lösung

$$K(t) = ce^{\frac{3}{2}t} + \frac{2F}{3}.$$

Um c zu berechnen lösen wir

$$\begin{aligned} K(0) &= ce^{\frac{3}{2}0} + \frac{2F}{3} \\ \Leftrightarrow \qquad c &= K(0) - \frac{2F}{3} \end{aligned}$$

Die Größe der Kolonie wird dann durch einfaches Einsetzen ermittelt

a) $c = 7 - \frac{2\cdot 9}{3} = 1$

b) $K(4) = 1 \cdot e^{\frac{3}{2}4} + \frac{2}{3}9 = e^6 + 6 \approx 409{,}43$

Antwort: Die Algenkolonie hat nach 4 Tagen eine Größe von etwa $409{,}43\,m^2$.

Ende der Klausuraufgaben