Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, R. Lang

10. Übung zur Vorlesung

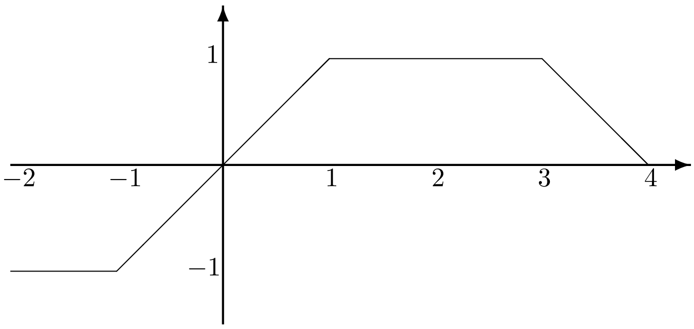
Mathematik für Geowissenschaftler I

WS 2011/12

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/Mathe_fuer_Geowissenschaftler_I.php

Abgabe: 17. 1. 2012

1. Aufgabe (4 Punkte)



Wie groß ist $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx$? Begründen Sie!

2. Aufgabe (4 Punkte)
Strömt eine Flüssigkeit durch eine zylindrische Röhre mit dem Radius R, ohne dabei Wirbel zu erzeugen, so ist die Geschwindigkeit v (in m/sec) eines Punktes, der den Abstand r von der Mittelpunktachse besitzt, gegeben durch

$$v(r) = \frac{p}{4\eta l}(R^2 - r^2).$$

Hierbei ist p der Druckunterschied zwischen den Rohrenden (in Pa), l die Länge der Röhre (in m) und η die Viskosität der strömenden Flüssigkeit (in Pa $\cdot$ sec). Für das Volumen $V(t)$, welches bis zum Zeitpunkt t durch die Röhre geflossen ist, ergibt sich dann

$$V(t) = \int_0^R 2\pi r t v(r)\,dr.$$

a) Begründen Sie die Formel für $V(t)$.

b) Berechnen Sie $V(t)$.

c) Realistische Werte für menschliche Blutgefäße sind $l = 0{,}02\,\mathrm{m}$, $R = 8 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}$ und $p = 400\,\mathrm{Pa}$; menschliches Blut hat eine mittlere Viskosität von $0{,}0027\,\mathrm{Pa} \cdot \mathrm{sec}$. Wieviel Blut fließt pro Minute durch ein derart dimensioniertes Gefäß?

d) Um wieviel Prozent vermindert sich die pro Zeiteinheit durchfließende Blutmenge, wenn R aufgrund von Ablagerungen an der Gefäßwand um $20\,\%$ verkleinert ist?

3. Aufgabe (4 Punkte)
Sie haben eine rotationsymmetrische antike Vase der Gesamthöhe $2\,\mathrm{m}$. Der Radius der Vase als Funktion der Höhe sei durch die Funktion $f(h) = h^3 - 2h^2 + 1{,}5$ gegeben. Man kann das Volumen der Vase approximieren, indem man n Scheiben der Höhe $\frac{2}{n}$ Meter übereinander stapelt und deren Volumen addiert.

a) Welches Volumen hat eine zylindrische Scheibe der Höhe $2/n$ mit Radius r?

b) Bilden Sie (gedanklich) einen Stapel aus n solchen Scheiben. Jede Scheibe bekommt als Radius den Radius der Vase an der Unterkante der Scheibe. Berechnen Sie die Radien der Scheiben für $n = 2, 5, 9$.

c) Berechnen Sie das Volumen der Vase näherungsweise für $n = 2, 5, 9$.