Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
JProf. Dr. O. Sander, R. Lang

12. Übung zur Vorlesung

Mathematik für Geowissenschaftler I

WS 2011/12

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2011/Vorlesungen/Mathe_fuer_Geowissenschaftler_I.php

Abgabe: 31. 1. 2012

1. Aufgabe (4 Punkte)
Eine strömende Flüssigkeit hat die konstante Temperatur T_u. Darin befindet sich ein Körper, dessen Temperatur $T(t)$ zur Zeit t sich gemäß der Differentialgleichung

$$T'(t) = k(T_u - T(t)), \tag{1}$$

ändert, wobei k eine positive Konstante ist.

a) Berechne die Menge aller Lösungen von (1)?

b) Der Faktor k hängt von Form und Material des Körpers, aber auch von der Beschaffenheit der Flüssigkeit und ihrer Strömungsgeschwindigkeit ab. Für $k = 0{,}4\,\mathrm{min}^{-1}$ und $T_u = 10^\circ\,\mathrm{C}$ berechne man die Zeit, die der Körper braucht, um von $80^\circ\,\mathrm{C}$ auf $20^\circ\,\mathrm{C}$ abzukühlen.

2. Aufgabe (4 Punkte)
Begründen Sie, ohne die Differentialgleichung zu lösen, warum jede Lösung von $y' = e^{|y|}$ eine monoton wachsende Funktion ist.

3. Aufgabe (4 Punkte)
Das Eulerverfahren ist ein algorithmischer Ansatz zur Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(t, y)$, $y(0) = y_0$. Zu einer Schrittweite $h > 0$ wird die Funktion $y(t)$ hierbei an den Stützstellen $t_i = ih$ für $i \in \mathbb{N}$ durch die Werte $y_{i+1} = f(t_i, y_i)h + y_i$ angenähert.
Berechnen Sie auf diese Weise zur Schrittweite $h = 0{,}1$ die Werte der ersten vier Stützstellen des Anfangswertproblems $y' = f(t, y) = 2y$, $y(0) = 3$. Skizzieren Sie Ihre Lösung geometrisch.