Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

Musterlösung für die Nachklausur zur Vorlesung Stochastik I im WiSe 2011/2012

Name:______________________________ Matr.-Nr.:________________

Studiengang:
◯ Mathematik ◯ Bioinformatik ◯ Informatik ◯ anderer:

Angestrebter Abschluß:
◯ Diplom ◯ Lehramt(Staatsexamen) ◯ anderer:
◯ Bachelor(Mono) ◯ Bachelor(Kombi, Lehramt) ◯ Master

Beschriften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, mit Ihrem Namen. Bitte heften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, nach der Klausur mit einem der bereitgestellten Hefter zusammen. Bitte benutzen Sie keinen Bleistift. Erlaubte Hilfsmittel sind alle Ihre schriftlichen Unterlagen, Bücher und ein nicht programmierbarer Taschenrechner. Die Klausur besteht mit Deckblatt und Anhang aus insgesamt vier Seiten auf zwei Blättern.

Wenn Sie Ihre Klausurergebnisse auf der Website der Vorlesung unter Ihrer Matrikelnummer nachlesen wollen, unterschreiben Sie bitte die folgende Erklärung:

Ich bin damit einverstanden, daß mein Ergebnis bei dieser Klausur unter meiner Matrikelnummer auf der Website zur Vorlesung veröffentlicht wird.

______________________________ Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	4	5	$\sum$
Punkte						

Viel Erfolg!

Bearbeiten Sie **alle** der folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (4+4=8 Punkte)
In einer Urne befinden sich fünf Kugeln, die mit den Ziffern $1, 2, 3, 4, 5$ durchnummeriert sind. Es wird zweimal mit Zurücklegen gezogen, und die beiden Ergebnisse werden der Reihenfolge nach notiert.

a) Geben Sie einen geeigneten Stichprobenraum Ω an. Wieviele Elementarereignisse enthält Ω (d.h., was ist $|\Omega|$)? Wieviele Elemente enthält die Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ von Ω?

b) Es sei A das Ereignis, dass die Summe der beiden Ergebnisse maximal 3 beträgt. Geben Sie die kleinste σ-Algebra auf Ω an, die A enthält, und berechnen Sie $\mathbb{P}(A)$.

Lösung:
a) Wähle
$$\Omega = \{(k, l) : \; k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}\}.$$
Es gilt $|\Omega| = 5 \cdot 5 = 25$ und $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|} = 2^{25} \approx 33.6\,\text{Mio.}$
b) Es ist
$$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$$
und
$$\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}$$
sowie
$$\mathbb{P}(A) = \frac{3}{25} = 12\%.$$

Aufgabe 2 (4+4=8 Punkte)
Eine Mutter zweier Kinder sagt:

a) "Mindestens eines meiner beiden Kinder ist ein Junge."

b) "Das älteste meiner beiden Kinder ist ein Junge."

Wie schätzen Sie jeweils die Chance ein, dass auch das andere Kind ein Junge ist?
Dabei können Sie davon ausgehen, dass Jungen- und Mädchengeburten gleichwahrscheinlich sind.

Lösung:
Definiere die Ereignisse
J: Beide Kinder sind Jungen.
A: Mindestens eines der beiden Kinder ist ein Junge.
B: Das ältere Kind ist ein Junge.
Mit
$$\Omega = \{(J, M), (J, J), (M, J), (M, M)\}$$
ist $J = \{(J, J)\}$, $A = \{(J, M), (J, J), (M, J)\}$ und $B = \{(J, M), (J, J)\}$.
a) Gesucht ist $\mathbb{P}(J|A)$.
$$\mathbb{P}(J|A) = \frac{\mathbb{P}(J \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{\mathbb{P}(J)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{1/4}{3/4} = 1/3.$$

b) Gesucht ist $\mathbb{P}(J|B)$.

$$\mathbb{P}(J|B) = \frac{\mathbb{P}(J \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(J)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2.$$

Aufgabe 3 (5+3=8 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable, deren Dichtefunktion f durch

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & : \quad x \in [-1, 1] \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1] \end{cases}$$

gegeben ist, wobei $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Welche Bedingungen müssen die Koeffizienten a, b erfüllen, damit f tatsächlich eine Dichtefunktion ist?

b) Welche Werte ergeben sich für die Koeffizienten a, b, wenn zusätzlich $\mathbb{P}(X < 0) = \frac{1}{4}$ gelten soll?

Lösung:
a) Damit f eine Dichtefunktion ist, muss $f(x) \geq 0 \; \forall x \in [-1, 1]$ und $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 1$ gelten. Es ist

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} ax + b\,dx = \left[\frac{1}{2}ax^2 + bx\right]_{-1}^{1} = 2b,$$

so dass $2b = 1$, also $b = \frac{1}{2}$, gelten muss.
Für positive a wird f bei $x = -1$ minimal mit $f(-1) = -a + \frac{1}{2}$. Damit dieser Wert nicht negativ wird, muss $a \leq \frac{1}{2}$ gelten. Umgekehrt wird für negative a die Funktion f bei $x = 1$ minimal mit $f(1) = a + \frac{1}{2}$. Damit dieser Wert nicht negativ wird, muss $a \geq -\frac{1}{2}$ gelten. Insgesamt ergibt sich $|a| \leq \frac{1}{2}$.
b) Es ist

$$\mathbb{P}(X < 0) = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}x\right]_{-1}^{0} = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}$$

und damit

$$\mathbb{P}(X < 0) = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 4 (3+5=8 Punkte)
In einem Großraumflugzeug haben insgesamt 500 Passagiere Platz. Da Kunden manchmal ihren Flug nicht antreten, lässt die Fluggesellschaft zwecks optimaler Auslastung 510 Tickets verkaufen. Es sei bekannt, dass die Kunden ihren Flug mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.04$ nicht antreten, wobei vereinfacht angenommen wird, dass das Nichterscheinen für verschiedene Kunden unabhängig voneinander ist. Man betrachte die Zufallsvariable X der erscheinenden Passagiere.

a) Wie ist X verteilt? Geben Sie eine Formel für $\mathbb{P}(X = k)$ an, wobei $k \in \mathbb{N}_0$.

b) Berechnen Sie approximativ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr Passagiere erscheinen als Plätze vorhanden sind.
Eine Tabelle zur Standardnormalverteilung finden Sie im Anhang auf Seite 4.

Lösung:
a) X ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 510$ und $p = 0.96$, d.h.

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{510}{k} 0.96^k 0.04^{510-k}.$$

b) Gesucht ist eine Approximation für $\mathbb{P}(X > 500)$. Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass X annähernd normalverteilt ist mit Erwartungswert $\mu = 510 \cdot 0.96 = 489.6$ und Varianz $\sigma^2 = 510 \cdot 0.96 \cdot 0.04 = 19.584$. Damit ist

$$\mathbb{P}(X > 500) = \mathbb{P}\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{500 - 489.6}{4.4254}\right) \approx \mathbb{P}(Y > 2.3501)$$

wobei $Y \sim N(0,1)$. Es ist

$$\mathbb{P}(Y > 2.3501) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq 2.3501) = 1 - 0.9906 = 0.0094 \approx 0.01,$$

d.h., die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt annähernd 1%.

Aufgabe 5 (4+4=8 Punkte)

a) Die Zufallsvariable X sei exponentialverteilt mit unbekanntem Parameter $\lambda > 0$. Es werden n unabhängige Stichproben $x_1, ..., x_n$ genommen. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

b) Betrachte eine stetig verteilte Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit Dichtefunktion f_θ, $\theta \in \mathbb{R}$. Es sei T der Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter θ und $Y = g(X)$ eine weitere Zufallsvariable, wobei $g'(x) > 0$ für alle x. Was ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für Y?

Lösung:
a) Die Likelihood-Funktion ist

$$\rho(x_1, ..., x_n, \lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_\lambda(x_k) = \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_k},$$

wobei die Unabhängigkeit der Stichproben genutzt wurde.
Ableiten nach λ ergibt

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\lambda} \prod_{k=1}^{n} \lambda e^{-\lambda x_k} &= \frac{d}{d\lambda} \lambda e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k} \\
&= e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k} - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k} \\
&= \left(1 - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k\right) e^{-\lambda \sum_{k=1}^n x_k},
\end{aligned}$$

und diese Funktion ist monoton fallend in λ. Aus $\frac{d}{d\lambda}\rho = 0$ folgt

$$1 - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k = 0, \quad \text{d.h.} \quad \lambda = \frac{1}{\sum_{k=1}^n x_k}.$$

Der Maximum-Likelihood-Schätzer für λ ist also gegeben durch $T(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{\sum_{k=1}^n x_k}$.
b) Die Dichtefunktion h_θ von Y ist gegeben durch

$$h_\theta(y) = \frac{f_\theta(g^{-1}(y))}{g'(g^{-1}(y))},$$

wobei g^{-1} die Umkehrfunktion von g ist. Damit gilt für die Likelihood-Funktionen ρ und $\tilde{\rho}$ von X bzw. Y

$$\tilde{\rho}(y, \theta) = c(y) \cdot \rho(g^{-1}(y), \theta),$$

wobei $c(y) = (g'(g^{-1}(y)))^{-1}$ nicht von θ abhängt. Damit ergibt sich das Maximum von $\tilde{\rho}$ direkt aus dem Maximum von ρ, und für die Maximum-Likelihood-Schätzer $\tilde{T}$ und T von Y bzw. X gilt

$$\tilde{T}(y) = T(g^{-1}(y)).$$

Ende der Klausuraufgaben