Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

Probeklausur zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

1. Aufgabe (8 Punkte)
Eine Urne enthält zwei Münzen A und B. Münze A ist fair, d.h. die Wahrscheinlichkeit für Kopf beträgt $\frac{1}{2}$. Bei Münze B hingegen beträgt die Wahrscheinlichkeit für Kopf nur $\frac{1}{3}$. Es wird zufällig eine Münze gezogen und dann geworfen.

a) Bestimmen Sie einen geeignenten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt die gezogene Münze Kopf?

c) Angenommen, die Münze zeigt Kopf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die Münze A?

2. Aufgabe (8 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable, deren Dichte f für $a \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + ax & : \quad x \in [0,1] \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{R} \setminus [0,1] \end{cases}$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie a.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

3. Aufgabe (8 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{E}$ unabhängige Ereignisse.

a) Zeigen Sie, dass auch A^c, B^c unabhängig sind.

b) Sei $X = I_{A \cap B}$ die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) von $A \cap B$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ gilt.

4. Aufgabe (8 Punkte)
Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

a) Bestimmen Sie Y so, dass $X_n \xrightarrow{\text{i.W.}} Y$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass auch $X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} Y$ für das in a) gewählte Y gilt. Verwenden Sie dabei nicht das Ergebnis aus a), sondern direkt die Definition von Konvergenz in Verteilung.

5. Aufgabe (8 Punkte)
Sie möchten die Zahl $\frac{\pi}{4}$ durch ein Monte-Carlo-Verfahren auf zwei Dezimalstellen genau berechnen. Dazu erzeugen Sie mit dem Computer zwei in $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen x, y und prüfen nach, ob sie die Bedingung $x^2 + y^2 \leq 1$ erfüllen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gerade gleich $\frac{\pi}{4}$, die Fläche des Viertelkreises.

a) Wie oft muss der Computer testen, wenn das Ergebnis zu 99% sicher sein soll?

b) Wie groß ist (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit, dass bei 1000 Wiederholungen mehr als $1000 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 785$ die Bedingung erfüllen?