Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

Musterlösung für die Probeklausur zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

1. Aufgabe (8 Punkte)
Eine Urne enthält zwei Münzen A und B. Münze A ist fair, d.h. die Wahrscheinlichkeit für Kopf beträgt $\frac{1}{2}$. Bei Münze B hingegen beträgt die Wahrscheinlichkeit für Kopf nur $\frac{1}{3}$. Es wird zufällig eine Münze gezogen und dann geworfen.

a) Bestimmen Sie einen geeignenten Wahrscheinlichkeitsraum.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt die gezogene Münze Kopf?

c) Angenommen, die Münze zeigt Kopf. Mit welcher Wahrscheinlichkeit handelt es sich um die Münze A?

Lösung:
a) Wähle den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ mit

- $\Omega = \{(A, K), (A, Z), (B, K), (B, Z)\}$, wobei z.B. (A, K) das Elementarereignis ist, dass Münze A gezogen und dann Kopf geworfen wird,
- $\mathcal{E} = \mathcal{P}(\Omega)$, also die Potenzmenge von Ω,
- $\mathbb{P}((A, K)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}((A, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}((B, K)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$, $\mathbb{P}((B, Z)) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

b) $\mathbb{P}(\text{Kopf}) = \mathbb{P}(\{(A, K), (B, K)\}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.
c)

$$\mathbb{P}(A|\text{Kopf}) = \frac{\mathbb{P}(A \,\text{und Kopf})}{\mathbb{P}(\text{Kopf})} = \frac{\mathbb{P}((A, K))}{\mathbb{P}(\text{Kopf})} = \frac{1/4}{5/12} = \frac{3}{5}$$

2. Aufgabe (8 Punkte)
Sei X eine Zufallsvariable, deren Dichte f für $a \in \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + ax & : \quad x \in [0, 1] \\ 0 & : \quad x \in \mathbb{R} \setminus [0, 1] \end{cases}$$

gegeben ist.

a) Bestimmen Sie a.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösung:
a) Eine Dichtefunktion muss im Integral den Wert 1 ergeben: $\int_0^1 \frac{1}{2} + at\, dt = 1$. Also

$$\int_0^1 \frac{1}{2} + at\, dt = \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}at^2\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}a \overset{!}{=} 1$$

$$\Leftrightarrow a = 1$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_0^1 x f(x)\,dx = \int_0^1 x\left(\frac{1}{2}+x\right)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}x + x^2\,dx = \left[\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}-0 = \frac{7}{12}.\\
\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2\left(\frac{1}{2}+x\right)\,dx = \left[\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{6}+\frac{1}{4}-0 = \frac{5}{12},\\
\mathrm{Var}(X) &= \mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2 = \frac{5}{12}-\left(\frac{7}{12}\right)^2 = \frac{11}{144}.
\end{aligned}$$

3. Aufgabe (8 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A, B \in \mathcal{E}$ unabhängige Ereignisse.

a) Zeigen Sie, dass auch A^c, B^c unabhängig sind.

b) Sei $X = I_{A\cap B}$ die charakteristische Funktion (Indikatorfunktion) von $A \cap B$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}(X) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$ gilt.

Lösung:
Da A, B unabhängig sind, gilt $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)$.
a) Zu zeigen ist $\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A^c\cap B^c) &= \mathbb{P}((A\cup B)^c)\\
&= 1-\mathbb{P}(A\cup B)\\
&= 1-(\mathbb{P}(A)+\mathbb{P}(B)-\mathbb{P}(A\cap B))\\
&= 1-\mathbb{P}(A)-\mathbb{P}(B)+\mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B)\\
&= (1-\mathbb{P}(A))\cdot(1-\mathbb{P}(B))\\
&= \mathbb{P}(A^c)\cdot\mathbb{P}(B^c)
\end{aligned}$$

b) Es ist $I_{A\cap B}(\omega) = 1$ für $\omega \in A\cap B$ und $I_{A\cap B}(\omega) = 0$ sonst. Damit ergibt sich

$$\mathbb{E}(I_{A\cap B}) = 1\cdot\mathbb{P}(A\cap B) + 0\cdot\mathbb{P}((A\cap B)^c) = \mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(A)\cdot\mathbb{P}(B),$$

wobei im letzten Schritt wieder die Unabhängigkeit von A und B genutzt wurde.

4. Aufgabe (8 Punkte)
Seien $X_1, X_2, ...$ unabhängige Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X_n = \frac{1}{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$.

a) Bestimmen Sie Y so, dass $X_n \xrightarrow{\text{i.W.}} Y$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass auch $X_n \xrightarrow{\text{i.V.}} Y$ für das in a) gewählte Y gilt. Verwenden Sie dabei nicht das Ergebnis aus a), sondern direkt die Definition von Konvergenz in Verteilung.

Lösung:
a) Wähle $Y = 0$ f.s., d.h., $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$. Fixiere ein $\varepsilon > 0$. Dann gilt

$$\mathbb{P}(|X_n - Y| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \begin{cases} 0 & : \quad 1/n \le \varepsilon \\ 1 & : \quad 1/n > \varepsilon \end{cases}$$

Damit gilt $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$ für alle $n \ge \frac{1}{\varepsilon}$, d.h. $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = 0$.
b) Es ist

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 1 & : \quad x \ge 0 \end{cases},$$

d.h., F_Y ist stetig überall bis auf an der Stelle $x = 0$. Daher muss $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_Y(x)$ für alle $x \ne 0$ gezeigt werden. Es ist

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < -1/n \\ 1/2 & : \quad -1/n \le x < 1/n \\ 1 & : \quad x \ge 1/n \end{cases}.$$

Sei $x < 0$. Dann gilt $F_{X_n}(x) = 0$ für $x < -\frac{1}{n}$ bzw. $n > -\frac{1}{x} > 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 0 = F_Y(x)$.
Sei $x > 0$. Dann gilt $F_{X_n}(x) = 1$ für $x \geq \frac{1}{n}$ bzw. $n \geq \frac{1}{x} > 0$ und somit $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = 1 = F_Y(x)$.

5. Aufgabe (8 Punkte)
Sie möchten die Zahl $\frac{\pi}{4}$ durch ein Monte-Carlo-Verfahren auf zwei Dezimalstellen genau berechnen. Dazu erzeugen Sie mit dem Computer zwei in $[0,1]$ gleichverteilte Zufallszahlen x, y und prüfen nach, ob sie die Bedingung $x^2 + y^2 \leq 1$ erfüllen. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist gerade gleich $\frac{\pi}{4}$, die Fläche des Viertelkreises.

a) Wie oft muss der Computer testen, wenn das Ergebnis zu 99% sicher sein soll?

b) Wie groß ist (näherungsweise) die Wahrscheinlichkeit, dass bei 1000 Wiederholungen mehr als $1000 \cdot \frac{\pi}{4} \approx 785$ die Bedingung erfüllen?

Lösung:
a)Betrachte n unabhängige Kopien $X_1, ..., X_n$ der Zufallsvariable X mit $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{\pi}{4}$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \frac{\pi}{4}$. Nach dem schwachen Gesetz der großen Zahl gilt

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \mathbb{E}(X)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{n\varepsilon^2} \tag{1}$$

wobei hier $\varepsilon = 0.01$ (wir wollen Genauigkeit auf zwei Dezimalstellen), $\mathbb{E}(X) = \frac{\pi}{4}$, $\mathrm{Var}(X) = \frac{\pi}{4} \cdot (1 - \frac{\pi}{4})$. Gesucht ist n. Es soll gelten

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{\pi}{4}\right| < 0.01\right) \geq 0.99,$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + ... + X_n}{n} - \frac{\pi}{4}\right| \geq 0.01\right) \leq 0.01.$$

Dies ist gemäß (1) erfüllt, falls $\frac{\mathrm{Var}(X)}{n\varepsilon^2} \leq 0.01$. Umstellen und einsetzen ergibt

$$n \geq \frac{\mathrm{Var}(X)}{0.01 \cdot \varepsilon^2} = 168.550,$$

d.h., es muss mindestens 168.550 mal getestet werden.
b) Nach dem zentralen Grenzwertsatz kann die Verteilung von $X_1 + ... + X_{1000}$ durch eine Normalverteilung approximiert werden. Um die Standardnormalverteilung verwenden zu können, muss vorher zentriert und standardisiert werden, d.h. die Zufallsvariable

$$Y = \frac{X_1 + ... + X_{1000} - 1000 \cdot \mathbb{E}(X)}{\sqrt{1000}\sqrt{\mathrm{Var}(X)}}$$

ist annähernd standardnormalverteilt. Nun gilt mit $\mathbb{E}(X) = \frac{\pi}{4} \approx 0.785$:

$$\mathbb{P}(X_1 + ... + X_{1000} \geq 785) = \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + ... + X_{1000} - 785}{\sqrt{1000}\sqrt{\pi/4 \cdot (1 - \pi/4)}} \geq \frac{785 - 785}{\sqrt{1000}\sqrt{\pi/4 \cdot (1 - \pi/4)}}\right) = \mathbb{P}(Y \geq 0) \approx \frac{1}{2}.$$