

10. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 27. Januar 2011, 12 Uhr

1. Aufgabe (Parameterschätzung I, 4 Punkte)

In einer Urne sind $N \geq 2$ Lose mit den Nummern $1, \dots, N$, wobei N unbekannt ist. Es wird $n \leq N$ mal ohne Zurücklegen gezogen mit den Ergebnissen x_1, \dots, x_n .

- Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T für N .
- Berechnen Sie $\mathbb{E}_N(T)$ und konstruieren Sie daraus einen erwartungstreuen Schätzer T^* für N .
Tipp: Sie können Aufgabe 3 vom 5. Übungszettel und die Formel $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$ verwenden.

2. Aufgabe (Parameterschätzung I, 4 Punkte)

Anhand von n unabhängigen Stichproben x_1, \dots, x_n soll die Varianz einer Zufallsvariable mit unbekannter Verteilung und unbekanntem Erwartungswert geschätzt werden. Vorausgesetzt wird nur, dass Erwartungswert und Varianz existieren. Konstruieren Sie einen erwartungstreuen Schätzer für die Varianz.

3. Aufgabe (Konfidenzintervall, 4 Punkte)

Bei einer Prüfung mit Notenvergabe 1, 2, 3, 4, 5 gibt es eine gewisse (unbekannte) Verteilung $\mathbb{P}(X = i) = p_i$, $i = 1, \dots, 5$. Es soll $\mathbb{E}(X)$ geschätzt werden, wobei bekannt ist, dass $\text{Var}(X) \geq 0.5$ gilt. Bei einer Prüfung von 25 unabhängigen Kandidaten entsteht folgender Notenspiegel:

1	2	3	4	5
2	7	4	6	6

Konstruieren Sie mithilfe der Tschebyschev-Ungleichung ein Konfidenzintervall für $\mathbb{E}(X)$ um den Mittelwert \bar{X} zum Niveau $\alpha = 0.25$. Ist der Wert $\mathbb{E}(X) = 3$ noch plausibel?

4. Aufgabe (Hypothesentest, 4 Punkte)

Es werden n unabhängige Stichproben x_1, \dots, x_n aus der Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, \nu]$ ($\nu > 0$) gezogen. Dabei soll der Test ϕ mit $H_0: \nu = 1$ gegen $H_1: \nu \neq 1$ durchgeführt werden, wobei der Annahmehereich als $A = \{(x_1, \dots, x_n) : \frac{1}{2} < \max(x_1, \dots, x_n) \leq 1\}$ festgelegt wird. Stellen Sie die Gütefunktion $G_\phi(\nu)$ auf. Welches Niveau hat der Test?