Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

2. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 11. November 2011, 12 Uhr

1. Aufgabe (σ-Algebren, 4 Punkte)
Seien $\mathcal{E}_1$ und $\mathcal{E}_2$ zwei σ-Algebren auf der Grundmenge Ω. Zeigen oder widerlegen Sie:

(a) Die Vereinigung $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$ ist wieder eine σ-Algebra.

(b) Der Schnitt $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ ist wieder eine σ-Algebra.

2. Aufgabe (Binomialverteilung, 4 Punkte)
Eine Münze mit $\mathbb{P}(\text{Kopf}) = p$, $0 < p < 1$, wird immer wieder geworfen. Sei p_n die Wahrscheinlichkeit, dass unter den ersten n Würfen Kopf gerade oft erscheint. Zeigen Sie die Rekursion

$$p_n = p(1 - p_{n-1}) + (1 - p)p_{n-1},$$

wobei $p_0 = 1$. Berechnen Sie daraus p_n (in Abhängigkeit von p).

3. Aufgabe (Hypergeometrische Verteilung, 4 Punkte)
Eine Urne enthält 3 weiße, 3 schwarze und 3 rote Kugeln, es werden 4 Kugeln gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Stichprobe nur Kugeln zweier Farben enthält?

4. Aufgabe (Approximation der Binomialverteilung, 6 Punkte)

(a) Es sei $B(k; n, p_n)$ die Binomialverteilung auf $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$ und $(p_n)_{n\geq 0}$ eine Folge in $[0, 1]$ mit der Eigenschaft $np_n \to \lambda$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} B(k; n, p_n) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\,.$$

(**Hinweis:** Verwenden Sie, dass $\binom{n}{k}$ für große $n \in \mathbb{N}$ asymptotisch wie $n^k/k!$ gegen ∞ strebt.)

(b) Ein Versuch mit der Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.01$ wird n mal unabhängig wiederholt. Wie groß muss n sein, damit die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Erfolg größer oder gleich 0.5 wird? Lösen Sie die Aufgabe exakt und mit der Poisson-Näherung.