

3. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 18. November 2011, 12 Uhr

1. Aufgabe (σ -Algebren, 4 Punkte)

Sei Ω überabzählbar und $\mathcal{G} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$ das System der ein-elementigen Teilmengen von Ω . Zeigen Sie

$$[\mathcal{G}] = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\},$$

wobei $[\mathcal{G}]$ die von \mathcal{G} erzeugte σ -Algebra ist.

Zeigen Sie weiter, dass die durch

$$P(A) = \begin{cases} 0 & : A \text{ abzählbar} \\ 1 & : A \text{ überabzählbar} \end{cases}$$

definierte Funktion ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, [\mathcal{G}])$ ist.

Bemerkung: Der Begriff “abzählbar“ ist im Sinne von “endlich oder unendlich abzählbar“ gemeint.

2. Aufgabe (Stetige Gleichverteilung 1, 4 Punkte)

Ein Punkt (a, b) wird zufällig gleichverteilt im Einheitsquadrat $[0, 1] \times [0, 1]$ gewählt und das Produkt $x = a \cdot b$ ausgegeben. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(y) = \mathbb{P}(x \leq y)$ und leiten Sie daraus die Dichtefunktion ab.

3. Aufgabe (Stetige Gleichverteilung 2, 4 Punkte)

In einem Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(0, 0)$ wird eine Sehne vom Punkt $(0, 1)$ zufällig gleichverteilt in eine Richtung gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge der Sehne größer als 1 ist?

4. Aufgabe (Normalverteilung, 4 Punkte)

Der Bus X83 erreicht die Bushaltestelle Arnimallee in der Regel pünktlich, nur selten kommt es zu größeren Abweichungen vom Fahrplan. Nehmen Sie an, dass die Abweichung der tatsächlichen Ankunftszeit von der Fahrplanzeit standardnormalverteilt ist und dass der Bus vor der Weiterfahrt grundsätzlich eine halbe Minute lang an der Bushaltestelle stehen bleibt, in der die Passagiere ein- und aussteigen können. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit den Bus zu verpassen, wenn man die Bushaltestelle

a) zwei Minuten vor der Fahrplanzeit erreicht?

b) genau zur Fahrplanzeit erreicht?

Bemerkung: Eine Tabelle mit den Werten der Standardnormalverteilung finden Sie in vielen Büchern zur Stochastik, so auch im Anhang des Buches von Georgii.