Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

5. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 2. Dezember 2011, 12 Uhr

1. Aufgabe (Glücksspiel, 4 Punkte)
Bei einem Glücksspiel wird eine faire Münze zweimal geworfen. Erscheint zweimal Kopf, gewinnt der Spieler einen Euro. Erscheint zweimal Zahl, muss der Spieler einen Euro zahlen. Erscheint einmal Kopf und einmal Zahl (egal in welcher Reihenfolge), so bleibt das Kapital des Spielers unverändert. Sei X die Veränderung des Kapitals.

a) Berechnen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von X, und bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

b) Wie ändern sich Erwartungswert und Varianz, wenn der Spieler 10 Euro statt einen Euro gewinnen bzw. verlieren kann?

2. Aufgabe (Eigenschaften einer Verteilungsfunktion, 4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

a) F ist monoton wachsend, d.h. es gilt: $x < y \Rightarrow F(x) \leq F(y)$.

b) F ist rechtsstetig, d.h. es gilt: $\lim_{h \searrow 0} F(x+h) = F(x)\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$.

3. Aufgabe (Momente, 4 Punkte)
Sei $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X : \Omega \to \mathbb{N}$ eine diskrete Zufallsvariable. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n)$.

b) $\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)\mathbb{P}(X \geq n)$.

4. Aufgabe (Erwartungswert, 4 Punkte)
Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei reelle Zufallsvariable, für die der Erwartungswert existiert. Zeigen oder widerlegen Sie:

a) Aus $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ folgt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.

b) Aus $\mathbb{E}(|X - Y|) = 0$ folgt $\mathbb{P}(X = Y) = 1$.