Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

6. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 9. Dezember 2011, 12 Uhr

1. Aufgabe (Unabhängigkeit, 4 Punkte)
Eine faire Münze wird zweimal geworfen. Definiere die folgenden Zufallsvariablen:

- X = Anzahl Kopf
- Y = Anzahl Zahl
- $V = |X - Y|$
- $W = \begin{cases} 0 & \text{falls beim ersten Wurf Kopf auftritt} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$

Sind dann X, V bzw. X, W bzw. V, W unabhängig? Welche dieser Paare sind unkorreliert?

2. Aufgabe (Tschebyschev-Ungleichung, 4 Punkte)
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis in einem Experiment eintritt, sei $\frac{1}{2}$. Ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Ereignis in 900 unabhängigen Versuchen zwischen 405 und 495 mal eintritt, größer als 0.88?

3. Aufgabe (Stetige Zufallsvariable, 4 Punkte)
Sei X gleichverteilt auf $[0, 2]$. Berechnen Sie die Dichte von X^2 sowie $\mathbb{E}(X^2)$ und $\mathrm{Var}(X^2)$.

4. Aufgabe (Wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion, 4 Punkte)
Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ eine Zufallsvariable. Die Verteilung einer solchen Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$ lässt sich kompakt durch eine Funktion $G_X : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ charakterisieren, die über

$$G_X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \mathbb{P}(X = n)$$

definiert ist und *wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion* genannt wird.

a) Zeigen Sie, dass
$$\mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!} G_X^{(n)}(0)$$
gilt, wobei $G_X^{(n)}$ die n-te Ableitung von G_X ist.

Auch der Erwartungswert von X lässt sich mithilfe der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion ausdrücken, und zwar durch $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

b) Bestimmen Sie G_X für eine geometrisch verteilte Zufallsvariable X und berechnen Sie anschließend deren Erwartungswert einmal direkt und einmal mithilfe von G_X.