

7. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 16. Dezember 2011, 12 Uhr

1. Aufgabe (Gemeinsame Verteilung und Unabhängigkeit, 4 Punkte)

Der Zufallsvektor (X, Y) sei gleichverteilt auf dem Einheitskreis $B := \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$, d.h., für die gemeinsame Dichte $f(x, y)$ gilt $f(x, y) = 1/\pi$ falls $(x, y) \in B$ und $f(x, y) = 0$ sonst.

- Berechnen Sie die Dichten f_X und f_Y von X bzw. Y .
- Sind X und Y unabhängig?
- Was ändert sich, wenn man anstatt des Einheitskreises das Einheitsquadrat $A := \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1\}$ betrachtet?

2. Aufgabe (Stetige Zufallsvariable, 4 Punkte)

Sei X gleichverteilt auf $[0, 1]$ und $Y = X - 0.5$.

- Bestimmen und zeichnen Sie die Verteilungs- und Dichtefunktion von Y .
- Finden Sie eine Zufallsvariable Z so dass Y und Z unkorreliert aber nicht unabhängig sind.

3. Aufgabe (Exponentialverteilung, 4 Punkte)

Die Wartezeit bei einer Telefon-Hotline sei exponentialverteilt mit einem Erwartungswert von 10 Minuten.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mindestens 5 Minuten warten zu müssen?
- Angenommen, man hat bereits 5 Minuten gewartet. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit noch einmal mindestens 5 Minuten warten zu müssen?
- Angenommen, man ruft mit einem zweiten Telefon gleichzeitig bei einer weiteren Hotline an, die eine exponentialverteilte Wartezeit mit Erwartungswert 8 Minuten hat und unabhängig von der ersten Hotline funktioniert. Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit mindestens 5 Minuten warten zu müssen bis zumindest einer der beiden Anrufe beantwortet wird? Was ist die durchschnittliche Wartezeit bis zur ersten Antwort?

4. Aufgabe (Normalverteilung, 4 Punkte)

- Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig standardnormalverteilt. Zeigen Sie, dass dann auch die Summe $X + Y$ normalverteilt ist. Bestimmen Sie Erwartungswert und Varianz von $X + Y$.
- Eine bestimmte Schraube lässt sich nur dann gut in ein entsprechendes Gewinde schrauben, wenn die Differenz $Y = X_2 - X_1$ aus Gewindedurchmesser X_2 und Schraubendurchmesser X_1 betragsmäßig kleiner als 1mm ist. Die Qualitätssicherung einer Autofirma hat festgestellt, dass der Durchmesser der extern bestellten Schrauben normalverteilt mit $\mu_1 = 20.2\text{mm}$ und $\sigma_1 = 0.5\text{mm}$ ist. Die normalverteilten Gewindedurchmesser haben einen Erwartungswert von $\mu_2 = 20\text{mm}$ und eine Streuung von $\sigma_2 = 0.5\text{mm}$. Wie groß ist der Anteil der Schrauben, die sich gut einschrauben lassen?