

8. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 13. Januar 2011, 12 Uhr

1. Aufgabe (Folgen von Zufallsvariablen, 4 Punkte)

Betrachte die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ und $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. Weiter sei $Y = 0$ (d.h. $\mathbb{P}(Y = 0) = 1$).

- Zeigen Sie, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen Y konvergiert, d.h. es gilt $X_n \xrightarrow{i.V.} Y$. Zeichnen Sie die Verteilungsfunktionen von X_n und Y .
- Prüfen Sie, ob $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auch in Wahrscheinlichkeit gegen Y konvergiert.

2. Aufgabe (Tschebyschev-Ungleichung, 4 Punkte)

Eine Münze mit $\mathbb{P}(\text{Kopf}) = p$, $0 \leq p \leq 1$, wird 20 mal geworfen und zeigt 15 mal Kopf. Bestimmen Sie p so, dass dieses Resultat mit Wahrscheinlichkeit 80% noch plausibel ist.

3. Aufgabe (Konvergenz von Zufallsvariablen, 4 Punkte)

Seien $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Folgen von Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{E}, \mathbb{P})$ mit $X_n \xrightarrow{f.s.} X$ und $Y_n \xrightarrow{f.s.} Y$.

- Zeigen Sie, dass $X_n + Y_n \xrightarrow{f.s.} X + Y$ gilt.
- Zeigen Sie: Dasselbe Resultat gilt, falls man überall "f.s." durch "i.W." ersetzt.

4. Aufgabe (Borel-Cantelli-Lemma, 4 Punkte)

Bei dem Versuch ein 6-stelliges Passwort zu knacken, das aus den Buchstaben A-Z und den Ziffern 0-9 besteht, werden zufällig gleichverteilt alle möglichen Kombinationen durchprobiert.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird niemals das richtige Passwort eingegeben?
- Zeigen Sie, dass fast sicher irgendwann zweimal hintereinander die gleiche Kombination eingegeben wird.