Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

9. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Abgabe bis Freitag, 20. Januar 2011, 12 Uhr

1. Aufgabe (Grenzwertsätze I, 4 Punkte)
Es sei X eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}$, für die $\mathbb{E}(X)$ und $\mathrm{Var}(X)$ existieren. Weiter seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Kopien von X und $S_n = X_1 + \ldots + X_n$. Zeigen Sie: Falls $\mathbb{E}(X) \neq 0$, dann ist $\mathbb{P}(S_n = 0$ für höchstens endlich viele $n) = 1$.

2. Aufgabe (Stirling-Formel, 4 Punkte)
Eine Klasse mit $2n$ Jungen und $2n$ Mädchen werde zufällig gleichverteilt in zwei gleich große Gruppen aufgeteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Gruppen gleich viele Jungen wie Mädchen enthalten? Nehmen Sie an, dass n groß sei, und schätzen Sie diese Wahrscheinlichkeit mit Hilfe der Stirling-Formel

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für} \quad n \to \infty$$

ab.

3. Aufgabe (Grenzwertsätze II, 4 Punkte)
Eine faire Münze wird 900 mal geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Kopf zwischen 405 und 495 mal auftritt?

4. Aufgabe (Parameterschätzung, 4 Punkte)
Eine Münze mit unbekannter Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ für Kopf wird geworfen, bis zum ersten mal Kopf auftritt. Das Experiment wird n mal wiederholt. Sei X_k die Anzahl der Würfe im k-ten Durchlauf. Zeigen Sie, dass $\bar{X}_n = (X_1 + \ldots + X_n)/n$ ein erwartungstreuer Schätzer für $1/p$ ist, d.h. dass gilt:

$$\mathbb{E}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{p}$$