

Weihnachtszettel zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Freiwillige Abgabe bis Freitag, 6. Januar 2012, 12 Uhr

*Die Aufgaben auf diesem Zettel sind Wiederholungsaufgaben.
Die Bearbeitung ist freiwillig, und die Punkte zählen als Zusatzpunkte.*

1. Aufgabe (Diskrete Zufallsvariable, 4 Punkte)

Der Weihnachtsmann hat vergessen die Weihnachtsgeschenke mit Namen zu beschriften und muss sie daher zufällig verteilen. Dabei enthält der Sack 4 Geschenke für 4 Kinder, denen jeweils genau ein Geschenk zusteht.

- a) Formulieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.
- b) Sei X die Anzahl der Kinder, die das richtige Geschenk bekommen. Bestimmen und zeichnen Sie die Verteilungsfunktion von X . Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass keines der Kinder das richtige Geschenk erhält?
- c) Wie groß ist für ein Kind die Wahrscheinlichkeit das richtige Geschenk zu bekommen, wenn es weiß, dass bereits k ($k = 1, 2, 3$) der anderen Kinder das jeweils richtige Geschenk bekommen haben?

2. Aufgabe (Stetige Zufallsvariable, 4 Punkte)

Ein Weihnachtsengel lässt versehentlich seinen 10cm langen Stab fallen. Dieser zerbricht zufällig gleichverteilt in zwei Teile.

- a) Sei X die Länge der kürzeren Strecke. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion, die Dichtefunktion, den Erwartungswert und die Varianz von X .
- b) Sei Y der Quotient kürzere durch längere Strecke. Was ist $\mathbb{E}(Y)$?

3. Aufgabe (Diskrete Zufallsvariable, 4 Punkte)

Beim Kauf einer Lichterkette mit 100 Lichtern hat man die Wahl zwischen zwei Herstellern. Bei Hersteller H_1 sind die Lampen unabhängig voneinander mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% kaputt, bei Hersteller H_2 beträgt diese Wahrscheinlichkeit nur 0.1%, dafür ist die Kette teurer.

- a) Muss man sich die teure Kette leisten, wenn man mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% sicher sein möchte, dass alle Lampen funktionieren?
- b) Man lässt eine faire Münze entscheiden, welchen Hersteller man wählt. Zuhause stellt man fest, dass keine der Lampen kaputt ist; von welchem Hersteller die Kette stammt, hat man allerdings schon wieder vergessen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Lichterkette von Hersteller H_1 ?

4. Aufgabe (Diskrete Zufallsvariable, 4 Punkte)

Ein fairer Würfel wird so oft geworfen bis zum ersten mal eine 6 erscheint. Dabei sei X die Anzahl der Würfe.

- a) Was ist die im Mittel zu erwartende Anzahl der Würfe? Wie groß ist die Streuung um den Mittelwert?
- b) Beweisen und interpretieren Sie die Gleichung

$$\mathbb{P}(X > k + m | X > k) = \mathbb{P}(X > m), \quad k, m \in \mathbb{N}_0.$$

- c) Das Würfelexperiment wird wiederholt. Sei Y die Anzahl der Würfe beim zweiten Durchlauf. Was ist $\mathbb{E}(X + Y)$ und $\text{Var}(X + Y)$?

Frohe Weihnachten!