Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Stefanie Winkelmann

Musterlösung für die 3. Übung zur Vorlesung

Stochastik I

Wintersemester 2011/2012

Aufgabe 1. (σ-Algebren, 4 Punkte)
Sei Ω überabzählbar und $G = \big\{\{\omega\} : \omega \in \Omega\big\}$ das System der einelementigen Teilmengen von Ω. Zeigen Sie

$$[G] = \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\},$$

wobei $[G]$ die von G erzeugte σ-Algebra ist. Zeigen Sie weiter, dass die durch

$$\mathbb{P}(A) = \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ abzählbar} \\ 1, & \text{falls } A \text{ überabzählbar} \end{cases}$$

definerte Funktion ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, [G])$ ist.

Beweis. Setze $\mathcal{A} := \{A \subset \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\}$. Wir zeigen zunächst $[G] \supseteq \mathcal{A}$. Sei $A \in \mathcal{A}$. Wir unterscheiden zwei Fälle.

Fall 1: Falls A abzählbar ist, dann gilt $A = \bigcup_{a\in A}\{a\}$ wobei $\{a\} \in G \subset [G]$ gilt. Da dies nach Voraussetzung eine abzählbare Vereinigung ist, folgt auch $A \in [G]$.

Fall 2: Sei nun A nicht abzählbar, d. h. A ist überabzählbar. Dann ist wegen $A \in \mathcal{A}$ das Komplement A^c abzählbar und damit selbst ein Element von $\mathcal{A}$. Nach dem ersten Fall gilt dann $A^c \in [G]$, und weil das eine σ-Algebra ist, folgt $A \in [G]$.

Wir zeigen nun $[G] \subseteq \mathcal{A}$. Dafür beobachten wir zuerst, dass $G \subseteq A$ gilt, denn jedes $\{\omega\} \in G$ ist abzählbar. Wenn wir zeigen können, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, dann gilt $[G] \subseteq \mathcal{A}$, da $[G]$ die kleinste σ-Algebra ist, welche G umfasst. Wir zeigen also, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist.

(i) Es gilt $\emptyset \in \mathcal{A}$, weil $\emptyset$ abzählbar ist.

(ii) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann ist A oder A^c abzählbar. Dazu äquivalent ist also $(A^c)^c$ oder A^c abzählbar und nach Definition von $\mathcal{A}$ gilt dann $A^c \in \mathcal{A}$.

(iii) Sei $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ eine Folge. Wir unterscheiden danach, ob $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ abzählbar oder überabzählbar ist.

Fall 1: Sei $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ abzählbar. Dann gilt sowieso schon $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ nach Definition von $\mathcal{A}$.

Fall 2: Sei $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ überabzählbar. Wir müssen $\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)^c \in \mathcal{A}$ zeigen. Es gibt mindestens eine überabzählbare Menge A_k mit $k \in \mathbb{N}$: wäre nämlich A_n abzählbar für alle $n \in \mathbb{N}$, dann auch die abzählbare Vereinigung $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$. Für dieses $k \in \mathbb{N}$ gilt dann, dass A_k^c abzählbar ist, da $A_k \in \mathcal{A}$ gilt. Zusammen ergibt das

$$\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)^c = \bigcap_{n=1}^\infty A_n^c \subseteq A_k^c,$$

also ist $\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right)^c$ abzählbar, und damit gilt nach Teil (ii) $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Zusammenfassend zeigt dies, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, folglich $[G] \subseteq \mathcal{A}$ und damit Gleichheit.

Wenden wir uns nun also der Abbildung $\mathbb{P}$. Wir zeigen, dass $\mathbb{P}$ ein W-Maß ist.

(i) Es gilt $\mathbb{P}(\Omega) = 1$, weil Ω nach Voraussetzung überabzählbar ist.

(ii) Sei $A_1, A_2, \ldots \in [G]$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen. Wieder unterscheiden wir danach, ob $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ abzählbar oder überabzählbar ist. Ist $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ abzählbar, so auch jedes A_n, es gilt also

$$\mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}_{\text{abz.}}\Bigg) = 0 = \sum_{n=1}^\infty \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{=0}.$$

Sei $\bigcup_{n=1}^\infty A_n$ überabzählbar. Es gibt also mindestens ein überabzählbares A_k, $k \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(A_n)_n$ paarweise disjunkt ist, gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{k\}} A_n \subseteq A_k^c$. Weil A_k^c jedoch abzählbar ist, ist es auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}\setminus\{k\}} A_n$ und folglich ist A_k das einzige überabzählbare Element der Folge $(A_n)_n$. Das wiederum impliziert

$$\mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\bigcup_{n=1}^\infty A_n}_{\text{überabz.}}\Bigg) = 1 = \underbrace{\mathbb{P}(A_k)}_{=1} + \sum_{n\in\mathbb{N}\setminus\{k\}} \underbrace{\mathbb{P}(A_n)}_{=0} = \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}(A_n).$$

□

Aufgabe 2. (Stetige Gleichverteilung 1, 4 Punkte)
Ein Punkt (a, b) wird zufällig gleichverteilt im Einheitsquadrat $[0,1] \times [0,1]$ gewählt und das Produkt $x = a \cdot b$ ausgegeben. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(y) = \mathbb{P}(x \leq y)$ und leiten Sie daraus die Dichtefunktion ab.

Lösung. Da es sich um die Gleichverteilung auf $[0,1]^2$ handelt, gilt $\mathbb{P}(A) = \text{Fläche}(A)$ für Mengen $A \subseteq [0,1]^2$, deren Fläche wir bestimmen können. Gesucht ist nun

$$\mathbb{P}(x \leq y) = \mathbb{P}\Big(\big\{(a,b) \in [0,1]^2 : x(a,b) \leq y\big\}\Big) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{\big\{(a,b) \in [0,1]^2 : ab \leq y\big\}}_{=:A_y}\Big).$$

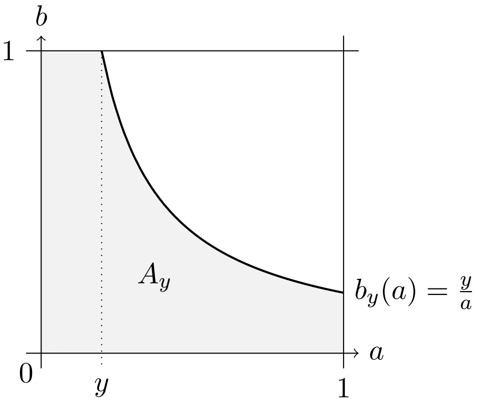

Abbildung 1: Die eingegraute Fläche rechnen wir aus.

Für festgehaltenes $a \in [0,1]$ sind alle Punkte $(a,b) \in [0,1]^2$ Element von A_y für die $b \leq \min\left(\frac{y}{a}, 1\right)$ gilt (siehe z. B. Abb. 1), denn für genau diese Punkte gilt $ab \leq y$. Das heißt, wir definieren eine Funktion

$$b_y(a) = \begin{cases} 1 & : \quad 0 \leq a \leq y \\ \frac{y}{a} & : \quad y < a \leq 1 \end{cases}$$

und berechnen

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_y) = \text{Fläche}(A_y) &= \int_0^1 b_y(a) \, \mathrm{d}a \\ &= \int_0^y 1 \, \mathrm{d}a + \int_y^1 \frac{y}{a} \, \mathrm{d}a \\ &= y - y \ln y. \end{aligned}$$

So folgt

$$F(y) = \begin{cases} 0 & : \quad y \leq 0 \\ y - y \ln y & : \quad 0 < y \leq 1 \\ 1 & : \quad y > 1 \end{cases}$$

Die Dichtefunktion f ergibt sich aus der Verteilungsfunktion F durch das Bilden der Ableitung:

$$f(y) = F'(y) = \begin{cases} -\ln y & : \quad 0 < y \leq 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Aufgabe 3. (Stetige Gleichverteilung 2, 4 Punkte)
In einem Kreis mit Radius 1 um den Punkt $(0,0)$ wird eine Sehne vom Punkt $(0,1)$ zufällig gleichverteilt in eine Richtung gezogen. Was ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge der Sehne größer als 1 ist?

Lösung. Die Länge der Sehne ist genau dann länger als 1, wenn sie die untere Halbsphäre um den Punkt $(0,1)$ schneidet. Die folgende Abbildung illustriert kurz, was gemeint ist.

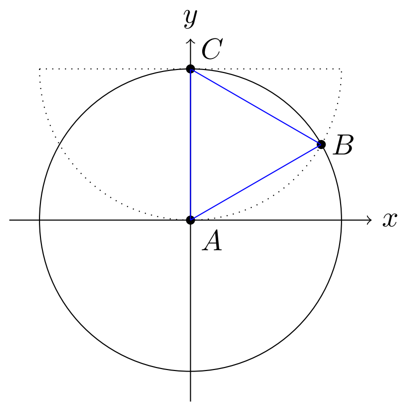

Abbildung 2: Der Einheitskreis

Dass die Richtung gleichverteilt ist, soll bedeuten, dass ein Punkt auf der gestrichelten Halbsphäre zufällig gleichverteilt ausgewählt wird und dann eine Sehne in diese Richtung gezogen wird. Gesucht ist also das Bogenelement, welches im Innern des Einheitskreises um die 0 liegt. Da das Dreieck ABC in der Abb. 2 ein gleichseitiges Dreickeck ist, sind alle Innenwinkel $\frac{\pi}{3}$ groß. Damit ist das Bogenelement außerhalb des Einheitskreises $2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ groß, das gesuchte Bogenelement ist somit $\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$ groß. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich dann durch $\frac{\frac{2}{3}\pi}{\pi} = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 4. (Normalverteilung, 4 Punkte)
Der Bus X83 erreicht die Bushaltestelle Arnimallee in der Regel pünktlich, nur selten kommt es zu größeren Abweichungen vom Fahrplan. Nehmen Sie an, dass die Abweichung der tatsächlichen Ankunftszeit von der Fahrplanzeit standardnormalverteilt ist und dass der Bus vor der Weiterfahrt grundsätzlich eine halbe Minute lang an der Bushaltestelle stehen bleibt, in der die Passagiere ein- und aussteigen können. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit den Bus zu verpassen, wenn man die Bushaltestelle

(a) zwei Minuten vor der Fahrplanzeit ereicht?

(b) genau zur Fahrplanzeit erreicht?

Lösung. Eine Einheit auf der x-Achse in der Standardnormalverteilung entspricht in diesem Modell einer Minute.

(a) Da der Bus eine halbe Minute stehen bleibt, interessiert uns die Wahrscheinlichkeit, dass der Bus zu einem Zeitpunkt innerhalb des Intervalls $(-\infty, -2.5)$ an der Haltestelle ankommt. Dann verpassen wir den Bus. Das entspricht dem Wert

$$\mathbb{P}(x \leq -2.5) = \Phi(-2.5) = 1 - \Phi(2.5) \cong 1 - 0.99379 = 0.00621 = 0.621\%.$$

(b) Analog interessiert uns hier $\Phi(-0.5)$.

$$\mathbb{P}(x \leq -0.5) = \Phi(-0.5) = 1 - \Phi(0.5) \cong 1 - 0.69146 = 0.30854 = 30.854\%.$$