Biespiellösungen Übung 1

Dominik Puhst

3. November 2012

Da wir im Tutorium nicht auf alles eingehen konnten, habe ich hier nochmal einige Aspekte zu den Aufgaben 1 und 2 des ersten Übungszettels zusammengefasst. Da in meinen beiden Tutorien unterschiedliche Schwerpunkte in Bezug auf die Nachbesprechung gelegt wurde, werdet ihr hier auch bereits gesehenes wiederfinden. Zu Aufgabe 1 sind für ein und denselben Beweis zwei Varianten dargestellt, zu Aufgabe 2 wurden die erste Aussage direkt in sehr formaler Schreibweise, die zweite und dritte direkt mit mehr Erklärungen und die vierte indirekt bewiesen.

Aufgabe 1: *Zwei Varianten zu Gleichung (4)*

Version 1: *Bezug zu bekannten Regeln der Aussagenlogik*

Seien A, X Mengen, es ist zu zeigen, dass $X \backslash (X \backslash A) = X \cap A$. Um dies zu beweisen, wollen wir zeigen, dass ein beliebiges x genau dann in der Menge links des Gleichheitszeichens ist, wenn es in der Menge rechts des Gleichheitszeichens ist.

Beweis.

$$\begin{aligned}
x \in X \setminus (X \setminus A) &\Leftrightarrow (x \in X) \wedge (x \notin X \setminus A) \\
&\Leftrightarrow (x \in X) \wedge \neg(x \in X \setminus A) \\
&\Leftrightarrow (x \in X) \wedge \neg((x \in X) \wedge (\neg x \in A)) \\
\text{(De Morgan)} &\Leftrightarrow (x \in X) \wedge \neg(x \in X) \vee \neg\neg(x \in A)) \\
\text{(Distributivität)} &\Leftrightarrow ((x \in X) \wedge \neg(x \in X)) \vee ((x \in X) \wedge \neg\neg(x \in A)) \\
\text{(Doppelnegation)} &\Leftrightarrow (x \in \emptyset) \vee ((x \in X) \wedge (x \in A)) \\
&\Leftrightarrow x \in (\emptyset \cup (X \cap A)) \Leftrightarrow x \in (X \cap A)
\end{aligned}$$

$\square$

Version 2: *Verwendung der Wahrheitstafel*

Es sei dasselbe zu zeigen wie in Version 1 und die Voraussetzungen seien identisch.

Beweis. Die Definitionen der Mengenoperatoren nutzend können wir schreiben

$$x \in X \setminus (X \setminus A) \Leftrightarrow (x \in X) \wedge \neg(x \in X \wedge \neg x \in A)$$
$$\text{sowie } x \in X \cap A \Leftrightarrow (x \in X \wedge x \in A).$$

Um nun die Äquivalenz dieser beiden Aussagen -und damit die Gleichheit der Mengen- zu zeigen, erstellen wir eine Wahrheitstafel. Dabei seien die Aussagen P und Q definiert durch $P :\Leftrightarrow x \in X$ und $Q :\Leftrightarrow x \in A$.

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$	$\overbrace{P \wedge \neg(P \wedge \neg Q)}^{U}$	$\overbrace{P \wedge Q}^{V}$	$U \Leftrightarrow V$
w	w	f	f	w	w	w	W
w	f	w	w	f	f	f	W
f	w	f	w	f	f	f	W
f	f	w	f	w	f	f	W

Damit ist das zu zeigende bewiesen. □

Aufgabe 2

Es seien X, Y, Z Mengen, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Abbildungen. Zu beweisen sind insgesamt vier Aussagen.

(i) f, g injektiv $\Rightarrow g \circ f$ injektiv

Beweis. Wir führen einen direkten Beweis. Seien also f und g injektiv und $a, b \in Z$ gegeben mit $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$. Dann gilt:

$$g(f(a)) = g(f(b)) \overbrace{\Rightarrow}^{\text{g injektiv}} f(a) = f(b) \overbrace{\Rightarrow}^{\text{f injektiv}} a = b.$$

Also ist $g \circ f$ injektiv. □

(ii) f, g surjektiv $\Rightarrow g \circ f$ surjektiv

Beweis. Wir führen wieder einen direkten Beweis und nehmen an, f und g seien surjektiv. Aus der Surjektivität von g folgt, dass es für jedes $z \in Z$ ein $y \in Y$ gibt, sodass $g(y) = z$. Da auch f surjektiv ist, gibt es für jedes solches $y \in Y$ wiederum ein $x \in X$ mit $f(x) = y$. Insgesamt existiert somit also für jedes $z \in Z$ ein $x \in X$ mit $z = g(y) = g(f(x))$, weswegen $g \circ f$ ebenfalls surjektiv ist. □

(iii) $g \circ f$ surjektiv $\Rightarrow g$ surjektiv

Beweis. Sei $g \circ f$ surjektiv und $z \in Z$. So gilt:

$$\exists x \in X : g(f(x)) = z$$

Da $f(x) \in Y$ folgt aus dieser Aussage direkt die Surjektivität von g. □

(iv) $g \circ f$ injektiv $\Rightarrow f$ injektiv

Beweis. Wir wollen nun einmal einen Kontrapositionsbeweis führen und demnach zeigen, dass gilt:

$$f \text{ nicht injektiv } \Rightarrow g \circ f \text{ nicht injektiv.}$$

Sei also f nicht injektiv, dann existieren $a \neq b \in X$ mit $f(a) = f(b)$. Da g eine Abbildung ist, gilt zwingend $g(f(a)) = g(f(b))$, weshalb $g \circ f$ nicht injektiv sein kann. Durch den Beweis dieser Kontrapositionsaussage ist das ursprünglich zu zeigende bewiesen. $\square$