Lösungsskizzen zu Übung 2

Dominik Puhst

8. November 2012

Aufgabe 1

Für den Beweis der Äquivalenzaussage sind zwei Implikationen zu zeigen. Allgemein sei darauf hingewiesen, dass $f^{-1}(A)$ die Urbildmenge beschreibt und mit einer möglicherweise, aber nicht zwingend existen Umkehrabbildung von f zunächst nicht viel zu tun hat. (JedeR sollte erklären können, worin der Unterschied zwischen $f(a)$ für ein $a \in A$ und $f(A)$ besteht!!!)

1: $(\forall A \subset N : f(f^{-1}(A)) = A) \Rightarrow f$ surjektiv

Beweis. Da die Voraussage für beliebige Teilmengen von N gilt, gilt insbesondere

$$f(f^{-1}(N)) = f(M) = N.$$

Dies liefert direkt die Surjektivität, da das Bild des Definitionsbereiches ganz N ist. □

2: f surjektiv $\Rightarrow (\forall A \subset N : f(f^{-1}(A)) = A)$

Beweis. Um, unter der Voraussetzung der Surjektivität, die Gleichheit zweier Mengen zu zeigen, müssen wir zeigen, dass sie gegenseitig Teilmengen einander sind.

1. „$f(f^{-1}(A)) \subset A$“: Sei $x \in f(f^{-1}(A))$, dann existiert ein $y \in f^{-1}(A)$ mit $f(y) = x$. Da y nun aber im Urbild von A liegt, muss $f(y) \in A$ folgen.
2. „$A \subset f(f^{-1}(A))$“: Sei $x \in A$, dann existiert wegen der Surjektivität ein $y \in f^{-1}(A) \subset M$ mit $f(y) = x$. Da $y \in f^{-1}(A)$ liegt, muss $x = f(y) \in f(f^{-1}(A))$ sein.

□

Aufgabe 3

a) Die meisten von euch wählten $f : M \to \mathcal{P}(M)$, definiert durch $f(x) = \{x\}$. Diese Abbildung ist offensichtlich injektiv und da für alle $x \in M$ gilt, dass $x \in f(x)$, folgt $A_f = \emptyset$.

b) Nun sei $f : M \to \mathcal{P}(M)$ eine beliebige Abbildung einer beliebigen Menge M auf ihre Potenzmenge. Wir wollen zeigen, dass f nicht surjektiv sein kann, weil $A_f \notin f(M)$.

Beweis. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an A_f sei im Bild von f. Dann gäbe es also ein $y \in M$ mit $f(y) = A_f$. Es stellt sich dir Frage, ob $y \in A_f$ gilt. Falls ja, so folgt:

$$y \in A_f \quad \overbrace{\Rightarrow}^{\text{Def. von } A_f} \quad y \notin f(y) = A_f,$$

was offensichtlich ein Widerspruch ist. Andernfalls folgt

$$y \notin A_f \Rightarrow y \notin f(y) \Rightarrow y \in A_f.$$

In beiden Fällen erhalten wir also einen Widerspruch, weshalb die getroffene Annahme, A_f sei im Bild von f falsch gewesen sein muss. □

c) Da wir in b) ein vollkommen beliebiges f betrachtet haben, kann es offenbar keine surjektive Abbildung von M nach $\mathcal{P}(M)$ geben, denn zu jeder dieser Abbildungen lässt sich eine Menge A_f konstruieren, die nicht im Bild von f liegt. Wenn es keine surjektive Abbildung geben kann, dann kann erst recht keine bijektive Abbildung existieren, weshalb die beiden Mengen M und $\mathcal{P}(M)$ unterschiedliche Mächtigkeiten haben müssen.