Lösungsskizzen zu Übung 3

Dominik Puhst

16. November 2012

Aufgabe 3

a) Zu zeigen ist, dass die auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definierte Relation

$$(a, b) \sim (a', b') \quad :\Leftrightarrow \quad a + b' = a' + b$$

eine Äquivalenzrelation ist. Es müssen also (i) Reflexivität, (ii) Symmetrie und (iii) Transitivität nachgewiesen werden. Es seien dazu $a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{N}$.

(i) $[a + b = a + b \;\Rightarrow\; (a, b) \sim (a, b)] \;\Rightarrow \sim$ reflexiv.

(ii) $[(a, b) \sim (a', b') \;\Rightarrow a + b' = a' + b \;\Rightarrow a' + b = a + b' \;\Rightarrow (a', b') \sim (a, b)]$ $\Rightarrow\sim$ symmetrisch.

(iii) Es gelte $(a, b) \sim (a', b')$ und $(a', b') \sim (a'', b'')$. Dann gilt nach Definition also $a + b' = a' + b$ sowie $a' + b'' = a'' + b'$. Es sei an dieser Stelle unbedingt darauf hingewiesen, dass Subtraktion als Addition mit dem inversen Element der Addition definiert ist und deshalb in $\mathbb{N}$ nicht verwendet werden kann. Wir folgern daher aus den beiden Gleichungen, dass

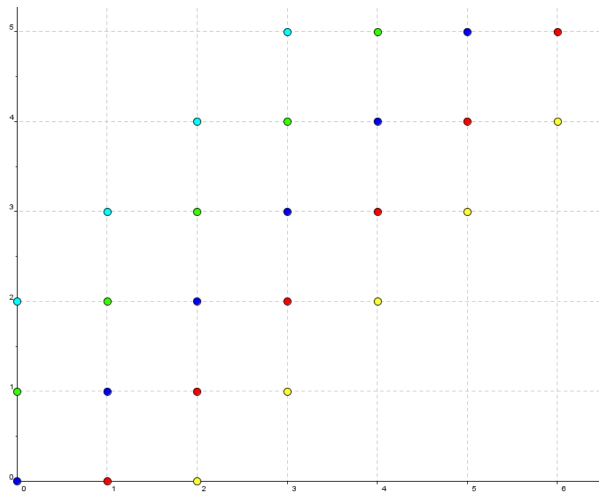
$$(a + b') + (a' + b'') = (a' + b) + (a'' + b')$$

bzw. wegen der Assoziativität und Kommutativität der Addition in $\mathbb{N}$

$$(a' + b') + (a + b'') = (a' + b') + (a'' + b).$$

Wegen der Injektivität der Nachfolgerabbildung ($\rightarrow$ Peano) können wir daraus schließen, dass $a + b'' = a'' + b$ und somit $(a, b) \sim (a'', b'')$, wesegen $\sim$ transitiv ist.

b) Wie die meisten von euch richtig erkannt haben, können wir salopp sagen, dass zwei Punkte in einer Äquivalenzklasse liegen, wenn die gerichtete Differenz der Komponenten identisch ist. So erhalten wir die folgende Darstellung der Äquivalenzklassen, wobei gleichfarbige Punkte jeweils in derselben Äquivalenzklasse liegen.



c) Seien $c, d \in \mathbb{N}$. Wir wollen nun zeigen, dass $[c, d]_\sim$ stets einen Repräsentanten der Form $(a, 0), a \in \mathbb{N}$ oder der Form $(0, b), b \in \mathbb{N}$ hat. Dazu unterscheiden wir drei Fälle:

Fall 1:

$$c = d \;\Rightarrow\; c + 0 = 0 + d \;\Rightarrow\; (c, d) \sim (0, 0)$$

In diesem Sonderfall hat die Äquivalenzklasse sogar einen Repräsentanten beider Formen.

Fall 2:

$$c > d \;\Rightarrow\; \exists n \in \mathbb{N} : c = n + d \;\Rightarrow\; c + 0 = n + d \;\Rightarrow\; (c, d) \sim (n, 0)$$

Hier liegt also die erste Form vor mit $a = n$.

Fall 3:

$$c < d \;\Rightarrow\; \exists m \in \mathbb{N} : c + m = d \;\Rightarrow\; c + m = 0 + d \;\Rightarrow\; (c, d) \sim (0, m)$$

Somit sind alle Fälle gezeigt und damit ist das zu zeigende bewiesen.