Lösungsskizzen zu Übung 5

Dominik Puhst

1. Dezember 2012

Aufgabe 3)

Der Vektorraum $\mathbb{Z}_2^3$ setzt sich wie folgt aus 8 Vektoren zusammen:

$$\mathbb{Z}_2^3 = \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

Da in $\mathbb{Z}_2^3$ gilt, dass $0+0 = 1+1 = 0$, ist der Nullvektor das additiv neutrale Element und jeder Vektor ist additiv invers zu sich selbst. Wir wollen nun alle Untervektorräume des $\mathbb{Z}_2^3$ finden, die die angegebene Menge enthalten. Dazu müssen wir uns offensichtlich nicht um die erste Bedingung des Unterraumkriteriums kümmern, da bereits die gegebene Menge nichtleer ist. Bezüglich der Abgeschlossenheit der skalaren Multiplikation lässt sich feststellen, dass $1 \cdot v = v$ und $0 \cdot v = v + v = \vec{0}$ für alle $v \in \mathbb{Z}_2^3$ gilt, weswegen diese Bedingung auch erfüllt ist, sobald der Nullvektor in einer Menge enthalten ist. Im Folgenden brauchen wir uns also nur noch um die Abgeschlossenheit der Vektoraddition kümmern.

Betrachten wir nun also die Menge

$$U_0 := \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \right\}.$$

Um diese Menge zu einem (möglichen) Unterraum zu erweitern, müssen zunächst all jene Elemente aus $\mathbb{Z}_2^3$ hinzugefügt werden, die sich als Summe der Elemente aus U_0 schreiben lassen. Wegen

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

muss jeder Unterraum des $\mathbb{Z}_2^3$, der U_0 enthält zwangsweise die Menge

$$U_1 := \left\{ \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \right\}$$

enthalten. Um nun zu prüfen, ob U_1 bereits ein Untervektorraum des $\mathbb{Z}_2^3$ ist, genügt es nach den Vorbemerkungen die folgenden Summen zu betrachten:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \in U_1 \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \in U_1$$

Somit ist U_1 abgeschlossen bezüglich der Vektoraddition und folglich ein Unterraum des $\mathbb{Z}_2^3$. Wie schauen nun, was passiert, wenn wir die Menge U_1 um einen weiteren Vektor erweitern. Da gilt

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},$$

erfordert die Hinzunahme eines beliebigen weiteren Vektors direkt die Hinzunahme aller anderen, sodass der einzige Unterraum neben U_1, der U_0 enthält, eben ganz $\mathbb{Z}_2^3$ ist.