Lösungsskizzen zu Übung 6

Dominik Puhst

7. Dezember 2012

Aufgabe 1)

Wir werden die Äquivalenz der drei Aussagen a), b) und c) zeigen, indem wir in einem Ringbeweis führen, also beweisen, dass $a) \Rightarrow c) \Rightarrow b) \Rightarrow a)$.

$a) \Rightarrow c)$: **(Kontrapos.)**

Wir nehmen an c) sei unwahr. Dann sind die Vektoren $v^1, \ldots, v^{r-1}$ linear abhängig oder es gilt $v^r \in span\,\{v^1, ..., v^{r-1}\}$. Ist ersteres der Fall, so existieren per definitionem $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1} \in K$, sodass

$$\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j v^j = 0 \quad \text{und nicht alle } \lambda_j = 0.$$

Dann gilt aber mithilfe derselben $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1} \in K$, dass

$$\sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j v^j + 0v^r = 0,$$

wobei wieder nicht alle $\lambda_j = 0$ und deshalb sind $v^1, \ldots, v^r$ linear abhängig. Andernfalls folgt:

$$\begin{aligned} v^r \in span\left\{v^1, ..., v^{r-1}\right\} &\Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1} : v^r = \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j v^j \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{r-1} \lambda_j v^j - 1v^r = 0, \end{aligned}$$

wobei offensichtlich nicht alle Faktoren 0 sind (derjenige vor v^r ist ja (-1)), weshalb wieder die Vektoren $v^1, \ldots, v^r$ linear unabhängig wären. Somit ergibt sich das hier zu zeigende.

$c) \Rightarrow b)$: **(Kontrapos.)**

Nehmen wir an b) sei unwahr, so existiert wenigstens ein $s \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq s \leq r$, sodass $v^s \in span\{v^1, \ldots, v^{s-1}\}$. Für den Fall $s = r$ folgt direkt, dass dann auch c) falsch ist, ansonsten gilt

$$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_{s-1} \in K : v^s = \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j v^j \;\Rightarrow \sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j v^j - 1v^s + \sum_{j=s+1}^{r+1} 0v^j = 0.$$

In letzterer Gleichung erhalten wir den Nullvektor aus einer Linearkombination der Vektoren $v^1, \ldots, v^{r-1}$, in der nicht alle Faktoren 0 sind. Demnach sind $v^1, \ldots, v^{r-1}$ linear abhängig und c) falsch, was wiederum das zu zeigende beweist.

$b) \Rightarrow a)$: **(Kontrapos.)**

Sei a) unwahr, d.h. $v^1, \ldots, v^r$ seien linear abhängig, dann existieren $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in K$, sodass

$$\sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j = 0 \quad \text{und nicht alle } \lambda_j = 0.$$

Wählen wir nun $s := \max\{1 \leq j \leq r : \lambda_j \neq 0\}$, so ist $\lambda_s \neq 0$ und $\lambda_j = 0$ für alle $s < j \leq r$. (Macht euch hier klar, dass so ein s eindeutig bestimmbar ist!) Nun gilt:

$$0 = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j v^j = \sum_{j=1}^{s} \lambda_j v^j \;\Rightarrow \lambda_s v^s = -\sum_{j=1}^{s-1} \lambda_j v^j \Rightarrow v^s = -\sum_{j=1}^{s-1} \frac{\lambda_j}{\lambda_s} v^j$$
$$\Rightarrow v^s \in span\left\{v_1, \ldots, v^{s-1}\right\}$$

Dies entspricht aber genau der Negation von b), weshalb nun insgesamt die Äquivalenz der drei Aussagen bewiesen wurde.

Aufgabe 2b)

Für diese Äquivalenzaussage müssen wie gewohnt zwei Richtungen gezeigt werden.

„w^1, w^2 linear unabhängig $\Rightarrow w^1 \times w^2 \neq 0$“: (Kontrapos.)

Sei $w^1 \times w^2 = 0$, so gilt nach Definition des Kreuzproduktes:

$$\begin{pmatrix} w_2^1 w_3^2 - w_3^1 w_2^2 \\ -w_1^1 w_3^2 + w_3^1 w_1^2 \\ w_1^1 w_2^2 - w_2^1 w_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow (1) : w_2^1 w_3^2 = w_3^1 w_2^2,$$
$$(2) : w_3^1 w_1^2 = w_1^1 w_3^2,$$
$$(3) : w_1^1 w_2^2 = w_2^1 w_1^2$$

Nun betrachten wir zwei Fälle. Im ersten ist w^1 der Nullvektor. Dann gilt insbesondere, dass $w^1 = 0w^2$, weshalb lineare Abhängigkeit herrscht. Im zweiten Fall ist w_1 nicht der Nullvektor, dann existiert also ein $j \in \{1,2,3\}$ mit $w_j^1 \neq 0$ und außerdem ein $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $w_j^2 = \lambda w_j^1$. Ist nun $j = 1$, so gilt also $w_1^2 = \lambda w_1^1$. Aus Gleichung (2) folgt dann $w_3^1 \lambda w_1^1 = w_1^1 w_3^2$ und demnach $\lambda w_3^1 = w_3^2$. Entsprechend folgt aus (3), dass $w_1^1 w_2^2 = w_2^1 \lambda w_1^1$ und somit $w_2^2 = \lambda w_2^1$. Nun gilt insgesamt

$$w^2 = \begin{pmatrix} w_1^2 \\ w_2^2 \\ w_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda w_1^1 \\ \lambda w_2^1 \\ \lambda w_3^1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} w_1^1 \\ w_2^1 \\ w_3^1 \end{pmatrix} = \lambda w^1,$$

weshalb also w^1 und w^2 linear abhängig sind. Ganz analog dazu verläuft der Beweis für $j = 1$ und $j = 2$.

„$w^1 \times w^2 \neq 0 \Rightarrow w^1, w^2$ linear unabhängig“: (Kontrapos.)

Seien w^1, w^2 linear abhängig, dann ist also entweder w^1 der Nullvektor, was als Ergebnis des Kreuzproduktes direkt den Nullvektor zur Folge hätte (macht euch das anhand der Definition des Kreuzproduktes klar) oder es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R}$, sodass $w^2 = \lambda w^1$. Dann folgt aber direkt:

$$w^1 \times w^2 = \begin{pmatrix} w_2^1 w_3^2 - w_3^1 w_2^2 \\ -w_1^1 w_3^2 + w_3^1 w_1^2 \\ w_1^1 w_2^2 - w_2^1 w_1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_2^1 \lambda w_3^1 - w_3^1 \lambda w_2^1 \\ -w_1^1 \lambda w_3^1 + w_3^1 \lambda w_1^1 \\ w_1^1 \lambda w_2^1 - w_2^1 \lambda w_1^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Insgesamt folgt somit das zu zeigende.