Lösungsskizzen zu Übung 7

Dominik Puhst

17. Dezember 2012

Aufgabe 1b)

Sei zunächst $|M| < \infty$, dann können wir schreiben $M = \{m_1, \ldots, m_n\}$ mit $n = |M|$. Betrachten wir nun die Menge $B := \{\{m_1\}, \{m_2\}, \ldots, \{m_n\}\} \subset \mathcal{P}(M)$, welche alle einelementigen Teilmengen von M enthält. Hierbei sei angemerkt, dass die Elemente der Menge B paarweise disjunkte Mengen sind und deshalb gilt $\{m_i\} + \{m_j\} = \{m_i, m_j\}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ mit $i \neq j$. Aus diesem Schema wird ersichtlich, dass B ein Erzeugendensystem von $\mathcal{P}(M)$ ist, da

$$M \supset A = \sum_{j=1}^{n} \lambda^j m_j, \text{ mit } \lambda^j = \begin{cases} 1, & \text{wenn } m_j \in A \\ 0, & \text{wenn } m_j \notin A \end{cases}$$

und außerdem linear unabhängig, da nur die triviale Linearkombination auf die leere Menge führt. Es folgt, dass B eine Basis ist, welche genau $n = |M|$ Elemente enthält. Somit gilt $\dim(\mathcal{P}(M) = |M|$.

Für den Fall, dass M unendlich viele Elemente besitzt, können wir analog eine Menge $B_n := \{\{m_1\}, \ldots, \{m_n\}\}$ definieren, wobei die m_i, $1 \leq i \leq n$ hier irgendwelche paarweise verschiedene Elemente aus M seien. Nach obigen Überlegungen ist diese Menge linear unabhängig und enthält n Elemente. Da n jedoch beliebig ist, gibt es kein maximal linear unabhängiges System mit endlich vielen Elementen in $\mathcal{P}(M)$ - wir könnten ja immer eine weitere einelementige Teilmenge von $\mathcal{P}(M)$ finden, sie mit B_n vereinigen und immernoch ein linear unabhängiges System erhalten. Demnach gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $\dim(\mathcal{P}(M)) > n$, also $\dim(\mathcal{P}(M)) = \infty$.

Aufgabe 2

a) Da wir uns in einem $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum befinden, können wir die Definition von U umformulieren zu

$$v \in U \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{m} v_j = 0,$$

denn je zwei Einsen addieren sich zu Null. Da der Nullvektor diese Bedingung offensichtlich erfüllt und als skalare Faktoren nur 0 und 1 in Frage kommen, genügt es die Abgeschlossenheit der Addition zu zeigen. Seien also dazu $u, v \in U$, dann gilt für $u + v$

$$\sum_{j=1}^{m}(u+v)_j = \sum_{j=1}^{m} u_j + v_j = \sum_{j=1}^{m} u_j + \sum_{j=1}^{m} v_j = 0 + 0 = 0,$$

weshalb auch $u + v$ in U liegt und U somit einen Unterraum des $\mathbb{Z}_2^m$ darstellt.

b) U wird durch eine lineare Gleichung definiert und beschreibt damit eine Hyperebene. Die Dimension muss als $m - 1$ betragen. Wir werden nun eine Basis ausrechnen und unser Ergebnis dann verifizieren. Alternativ hätten wir aber auch einfach mithilfe obiger Argumentation $m - 1$ linear unabhängige Vektoren aus U zu einer Basis vereinen können. Die Basis erhalten wir jetzt, indem wir das gegebene Gleichungssystem lösen. Dabei haben wir offenbar $m - 1$ frei wählbare Parameter und setzen $v_m = t_m, v_{m-1} = t_{m-1}, \ldots, v_2 = t_2$, mit $t_2, \ldots, t_m \in \mathbb{Z}_2^m$. Dann folgt für v_1:

$$\sum_{j=1}^{m} v_j = 0 \Leftrightarrow v_1 + \sum_{j=1}^{m} v_j = 0 \Leftrightarrow v_1 + \sum_{j=2}^{m} t_j = 0 \Leftrightarrow v_1 = \sum_{j=2}^{m} t_j$$

Beim letzten Schritt wurde verwendet, dass in Z_2 das additiv inverse Element zu 1 selbige ist. Es ergibt sich schließlich:

$$v \in U \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} \sum_{j=2}^{m} t_j \\ t_2 \\ t_3 \\ \vdots \\ t_{m-1} \\ t_m \end{pmatrix} \Rightarrow U = span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Wegen der offensichtlichen linearen Unabhängigkeit dieser $m-1$ Vektoren, ist dadurch eine Basis von U gegeben und es gilt $\dim(U) = m - 1$.