Lösungsskizzen zu Übung 9

Dominik Puhst

17. Januar 2013

Aufgabe 1

Da der Spaltentausch und die Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile aus den elementaren Zeilenumformungen der Typen I (Multiplikation einer Zeile mit einem Skalar) und II (Addition zweier Zeilen) hervorgehen, müssen wir nur zeigen, dass eZu der Typen I und II den Kern einer Matrix nicht verändern. Betrachten wir dazu die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m\times n}$, deren i-te Zeile $z_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2}, & \dots, & a_{i,n}\end{pmatrix}$ ist (mit $a_{i,j} \in \mathbb{K}, 1 \leq j \leq n$, und $1 \leq i \leq m$). Es gilt für die Kernelemente von A

$$x \in \ker(A) \;\Leftrightarrow\; \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = 0 \;\forall i \in \{1, \dots, m\}\,.$$

Typ I

Sei nun $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$ und gehe A' aus A durch Multiplikation der k-ten Zeile mit λ hervor. Insbesondere folgt daraus, dass alle Zeilen außer der k-ten unverändert bleiben und somit nicht betrachtet werden müssen. Es gilt dann für die k-ten Zeilen der Matrizen:

$$\begin{aligned} x \in \ker(A) &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{k,j}x_j = \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \lambda \cdot 0 = 0 \\ &\Rightarrow x \in \ker(A') \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde verwendet, dass sich die anderen Zeilen nicht verändert haben. Bis hierhin haben wir nun gezeigt, dass nach Typ I gilt $\ker(A) \subset \ker(A')$. Für die andere Richtung gilt (wieder nur unter Betrachtung der k-ten Zeile:

$$\begin{aligned} x \in \ker(A') &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \lambda a_{k,j}x_j = 0 \Rightarrow \lambda \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = 0 \Rightarrow x \in \ker(A) \end{aligned}$$

Überlegt euch einmal, woraus die vorletzte Implikation folgt. Insgesamt haben wir nun für Typ I: $\ker(A) = \ker(A')$.

Typ II

Seien die Bezeichnungen wie oben und gehe A' aus A hervor, indem wir die k-te Zeile durch die Summe der k-ten und der l-ten ersetzen. Dann gilt wieder:

$$\begin{aligned} x \in \ker(A) &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{l,j}x_j = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n}(a_{k,j} + a_{l,j})x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j + \sum_{j=1}^{n} a_{l,j}x_j = 0 + 0 = 0 \\ &\Rightarrow x \in \ker(A') \end{aligned}$$

und ebenso

$$\begin{aligned} x \in \ker(A') &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{l,j}x_j = \sum_{j=1}^{n}(a_{k,j} + a_{l,j})x_j = 0 \\ &\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{k,j}x_j = \sum_{j=1}^{n}((a_{k,j} + a_{l,j}) - a_{l,j})x_j \sum_{j=1}^{n}(a_{k,j} + a_{l,j})x_j - \sum_{j=1}^{n} a_{l,j}x_j \\ &= 0 - 0 = 0 \Rightarrow x \in \ker(A) \end{aligned}$$

Insgesamt folgt also auch für Typ II: $\ker(A) = \ker(A')$.