

Lösungsskizzen zu Übung 10

Dominik Puhst

24. Januar 2013

Aufgabe 1

Wir schreiben das LGS in Matrixschreibweise auf und formen in nZSF um. So erhalten wir:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 6 & 0 & -1 & 7 \\ 6 & 9 & 1 & -1 & 6 \\ 10 & 15 & -1 & -11 & \alpha \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1,5 & 0 & -0,75 & 1,75 \\ 0 & 0 & 1 & 3,5 & -4,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 22 \end{array}\right)$$

Es ist nun schnell ersichtlich, dass das LGS nur für $\alpha = 22$ lösbar ist. In diesem Fall lässt sich die Lösungsmenge ablesen:

$$\mathcal{L} = \begin{pmatrix} 1,75 \\ 0 \\ -4,5 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} -0,75 \\ 0 \\ 3,5 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1,5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2

a) Eine Möglichkeit wäre $L(A)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Hier müssen wir zunächst feststellen, dass

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} : x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

So erhalten wir eine solche Abbildung durch $L(B)$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- c) Eine derartige lineare Abbildung kann es nicht geben, da eine injektive lineare Abbildung zwischen zwei endlich-dimensionalen Vektorräumen gleicher Dimension stets auch surjektiv ist und umgekehrt.
- d) Hier greift der Satz aus c) nicht, denn c_{00} ist nicht endlich-dimensional. In der Tat finden wir eine Abbildung, die das geforderte erfüllt. Sei dazu $c = (c_0, c_1, \dots) \in c_{00}$, dann definieren wir die lineare Abbildung $l : c_{00} \rightarrow c_{00}$ durch $l(c) = c'$, wobei $c'_0 = 0$ und $c'_n = c_{n-1}$ für $n \geq 1$. Es ist leicht ersichtlich, dass zum Beispiel die einfache Folge $n = (1, 0, 0, \dots)$ nicht "getroffen" wird - also ist l nicht surjektiv - aber jede Folge ein anderes Bild hat - also ist l injektiv. Dass l tatsächlich eine lineare Abbildung ist, könnt ihr als Übung noch einmal überprüfen.

Aufgabe 3

Es lohnt sich zunächst, sich Gedanken über den Vektorraum $Hom(V, W)$ zu machen. Insbesondere gilt dort, dass das neutrale Element, das ja in jedem Untervektorraum enthalten sein muss, die Nullabbildung $n : V \rightarrow W$ mit $n(v) = 0$ f.a. $v \in V$ ist.

$$X = \{f \in Hom(V, W) : \ker(f) \subseteq U\}:$$

Wir prüfen, ob $n \in X$. Es gilt $\ker(n) = V \not\subseteq U$, zumindest falls $U \neq V$. Somit kann X im Allgemeinen (Sonderfall eben $U = V$) kein Untervektorraum sein. Im Fall $U = V$ ist n das einzige Element in X und bildet somit einen UVR.

$$Y = \{f \in Hom(V, W) : \ker(f) \supseteq U\}:$$

Es sind die drei Unterraumbedingungen zu überprüfen:

- (i) $\ker(n) = V \subseteq U \Rightarrow n \in Y \Rightarrow Y \neq \emptyset$
- (ii) $f, g \in Y \Rightarrow \forall u \in U : f(u) = g(u) = 0 \Rightarrow (f + g)(u) = f(u) + g(u) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow U \subseteq \ker(f + g) \Rightarrow (f + g) \in Y$
- (iii) $f \in Y, \lambda \in \mathbb{K} : \forall u \in U : (\lambda f)(u) = \lambda f(u) = \lambda \cdot 0 = 0 \Rightarrow U \subseteq \ker(\lambda f) \Rightarrow (\lambda f) \in Y$

Insgesamt folgt also, dass Y ein Untervektorraum von $Hom(V, W)$ ist.

$$Z = \{f \in Hom(V, W) : \ker(f) = U\}:$$

Hier gilt mit selber Argumentation wie bei X , dass Z nur dann einen Untervektorraum bildet, wenn $U = V$ gilt.

Aufgabe 4

- a) Sei $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ eine Basis von U , so können wir sie mit v und weiteren Elementen aus V zu einer Basis $\mathcal{B}_V = \{u_1, \dots, u_k, v, v_{k+2}, \dots, v_n\}$ von V ergänzen. Nun definieren wir $l \in \text{Hom}(V, \mathbb{K})$ über die Bilder der Basisvektoren durch $l(u_1) = \dots = l(u_k) = 0$, wodurch sichergestellt ist, dass alle Vektoren aus U im Kern von l liegen. Definieren wir weiterhin $l(v) = 1$ ist auch die zweite Bedingung erfüllt. Die Bilder der anderen Basisvektoren können beliebig gewählt werden. Der entscheidende Trick bei dieser Aufgabe ist die Wahl einer geeigneten Basis.
- b) Sei $k = \dim(U)$. Wir wählen $m = \dim(V)$ (auch ein kleineres m in Abhängigkeit von k wäre denkbar). Wir ergänzen wie in a) eine Basis $\mathcal{B}_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ von U zu einer Basis $\mathcal{B}_V = \{u_1, \dots, u_k, v_{k+1}, \dots, v_m\}$ von V . Nun definieren wir $f \in \text{Hom}(V, \mathbb{R}^m)$ wieder, indem wir die Bilder der Basisvektoren festlegen. Da $U = \ker(f)$ erfüllt sein soll, setzen wir $f(u_1) = \dots = f(u_k) = 0$. Weiterhin müssen wir sicherstellen, dass kein Element aus $V \setminus U$ auf 0 abgebildet wird. Dazu setzen wir beispielsweise $f(v_i) = e^i, i = k+1, \dots, m$, wobei e^i den i -ten Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^m$ bezeichne. Durch die explizite Angabe eines solchen f ist die Existenz bewiesen.