Lösungsskizzen zum Ferienzusatzzettel

Dominik Puhst

19. Januar 2013

Aufgabe 1

a) Bezeichne x_i die Anzahl der Isländer, die am i. Dezember geärgert werden ($12 \leq i \leq 24$), so können die Informationen folgendermaßen in ein LGS geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix}1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&1\\1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}x_{12}\\x_{13}\\x_{14}\\x_{15}\\x_{16}\\x_{17}\\x_{18}\\x_{19}\\x_{20}\\x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\\x_{24}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15382\\15577\\12801\\11667\\14666\\15612\\15225\\15227\\16502\\16542\\15331\\15177\\15105\end{pmatrix}$$

Um diese Matrix in (nichtnormierte) Zeilenstufenform zu bringen müssen wir nur die letzte Zeile verändern, es ergibt sich in dieser:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{pmatrix} = 7500$$

Daraus lässt sich ablesen, dass $x_{24} = 7500$ und durch Einsetzen dieses Wertes in die ersten 12 Gleichungen ergeben sich nach und nach die Werte x_{23} bis x_{12}. Die vollständige Lösung ist:

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{13} \\ x_{14} \\ x_{15} \\ x_{16} \\ x_{17} \\ x_{18} \\ x_{19} \\ x_{20} \\ x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \\ x_{24} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7605 \\ 7777 \\ 7800 \\ 5001 \\ 6666 \\ 8000 \\ 7612 \\ 7613 \\ 7614 \\ 8888 \\ 7654 \\ 7677 \\ 7500 \end{pmatrix}.$$

b) Bei der veränderten Aufgabenstellung ist im Vergleich zu a) nur die letzte Zeile verändert. Beim Umformen in ZSF entsteht dort eine Nullzeile, weshalb das LGS nicht mehr eindeutig lösbar ist.

Aufgabe 2

Abgeschlossenheit:

$$(c_{m,n} \circ c_{a,b})(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = c_{m,n}(\begin{pmatrix} a+x \\ b+(-1)^a y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} m+a+x \\ n+(-1)^m(b+(-1)^a y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (m+a)+x \\ (n+(-1)^m b)+(-1)^{m+a} y \end{pmatrix} = c_{m+a,n+(-1)^m b}(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$
$$\Rightarrow c_{m,n} \circ c_{a,b} = c_{m+a,n+(-1)^m b}$$

Assoziativität:

Folgt direkt aus der Assoziativität der Komposition beliebiger Abbildungen.

neutrales Element:

$c_{0,0}$ ist neutral, da aus den vorherigen Überlegungen folgt:

$$c_{0,0} \circ c_{a,b} = c_{0+a,0+(-1)^0 b} = c_{a,b}$$

inverse Elemente:

Ebenfalls aus den vorherigen Überlegungen folgt:

$$c_{-a,(-1)^{a+1}b} \circ c_{a,b} = c_{-a+a,(-1)^{a+1}b+(-1)^{-a}b} = c_{0,0}$$

Somit ist $c_{-a,(-1)^{a+1}b}$ invers zu $c_{a,b}$ und wir haben bis hierhin gezeigt, dass es sich um eine Gruppe handelt.

Kommutativität

Die Gruppe ist nicht abelsch, da zum Beispiel:

$$(c_{1,0} \circ c_{0,1})(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = c_{1,0}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ aber}$$
$$(c_{0,1} \circ c_{1,0})(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}) = c_{0,1}(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Fall 1: $w \notin f(V)$

Daraus folgt direkt: $f^{-1}(\{w\}) = \emptyset$.

Fall 2: $w \in f(V)$

Liegt w im Bild von f, so gibt es zumindest ein $v \in V$ mit $f(v) = w$. Wir behaupten nun, dass in diesem Fall $f^{-1}(\{w\}) = v + \ker(f)$ gilt, und $f^{-1}(\{w\})$ somit ein affiner Unterraum ist.

Beweis. „$\subset$“: Sei $u \in f^{-1}(\{w\})$, dann gilt insbesondere $u \in V$ und deshalb existiert ein $x \in V$ mit $u = v + x$. Es folgt:

$$\begin{aligned} w = f(u) = f(v+x) = f(v) + f(x) = w + f(x) \ &\Rightarrow f(x) = 0 \ \Rightarrow x \in \ker(f) \\ \Rightarrow u = v + x \in u + \ker(f) \end{aligned}$$

„$\supset$“: Sei $u \in v + \ker(f)$, so existiert ein $x \in \ker(f)$ mit $u = v + x$ und es gilt:

$$f(u) = f(v+x) = f(v) + f(x) = w + 0 = w \ \Rightarrow u \in f^{-1}(\{w\})$$

□

Aufgabe 4

a) Die zu bearbeitende Matrix A wird durch eZu in nZSF überführt, wodurch A' entsteht. Das Ergebnis ist:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 11 & 7 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 24 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -12 \end{pmatrix}$$

Da der Rang 4 beträgt, gilt $\dim(span\,\{v_1, v_2, v_3, v_4\}) = 4$ und $u + span\,\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ist somit eine Hyperebene im $\mathbb{R}^5$. Ablesbar ist

$$\ker(A') = \ker(A) = span \left\{ \begin{pmatrix} 24 \\ -12 \\ 31 \\ -12 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die beschreibende Gleichung hat also die Form $E : 24x_1 - 12x_2 + 31x_3 - 12x_4 - x_5 = a$, wobei wir a erhalten, indem wir den Stützvektor u in die Gleichung einsetzen. Es ergibt sich.

$$E : 24x_1 - 12x_2 + 31x_3 - 12x_4 - x_5 = 2013$$

b) Beim Überführen der Matrix in ZSF entsteht eine Nullzeile, weswegen durch diese Vektoren keine Hyperebene beschrieben wird.

Aufgabe 5

a) „⇒“: Sei U Unterraum des $\mathbb{K}^m$, dann existieren Vektoren $v_i \in U, 1 \leq i \leq n \leq m$, sodass $B_U = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von U ist. Bestehe die Matrix $A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ nun spaltenweise aus den v_i, so gilt $SR(A) = U$.
„⇐“: Sei$A \in \mathbb{K}^{m \times n}$ eine Matrix mit $SR(A) = U$, so ist U Unterraum des $\mathbb{K}^m$, da der Spaltenraum stets einen Unterraum bildet und die Spalten jeweils m Einträge haben.

b) „⇒“: Beweis durch Kontraposition: Es gilt:

$$0 \in SR(A) - b \ \Leftrightarrow b \in SR(A) \Leftrightarrow b \in span\left\{A^1, \ldots, A^n\right\} \Leftrightarrow A^1, \ldots, A^n, b \text{ l.a.}$$

Demnach folgt: Wenn $A^1, \ldots, A^n, b$ linear unabhängig sind, ist 0 nicht in $SR(A) - b$ enthalten und $SR(A) - b$ demnach kein Unterraum bzw. wenn $SR(A) - b$ ein Unterraum ist, so müssen $A^n, \ldots, A^n, b$ linear abhängig sein.
„⇐“: Sind $A^1, \ldots, A^n, b$ linear abhängig, so gilt (unter Betrachtung der anderen Voraussetzungen (!)) $b \in span\{A^1, \ldots, A^n\} = SR(A)$. Für jedes $v \in SR(A) - b$ existiert nun ein $x \in SR(A)$ mit $v = x - b$ und aus $b \in SR(A)$ und der Tatsache, dass $SR(A)$ ein Vektorraum ist folgt schließlich $v = x - b \in SR(A)$. Analog folgt für jedes $v \in SR(A)$, dass $v = v + b - b$ und wegen $v + b \in SR(A)$ auch $v \in SR(A) - b$. Somit haben wir letzendlich $SR(A) = SR(A) - b$, womit $SR(A) - b$ ein echter Unterraum ist.

Aufgabe 6

a) Sei $\mathcal{B}_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von U_1 und $\mathcal{B}_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von U_2. Wir wollen nun zeigen, dass $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ eine Basis von $U_1 + U_2$ ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass es sich bei $\mathcal{B}$ um ein Erzeugendensystem des $U_1 + U_2$ handelt.

$$\begin{aligned} &u \in U_1 + U_2 \Rightarrow \exists u_1 \in U_1, u_2 \in U_2 : u = u_1 + u_2 \\ &\qquad \Rightarrow \exists \lambda_1, \ldots \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots, \lambda_{n+m} \in \mathbb{K} : u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{n+j} w_j \end{aligned}$$

Demnach lässt sich u also durch $\mathcal{B}$ erzeugen. Für die lineare Unabhängigkeit von $\mathcal{B}$ betrachte mit $\lambda_1, \ldots \lambda_{n+m} \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{n+j} wj = 0 \ &\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i vi = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_{n+j} wj \\ &\overset{(1)}{\Rightarrow} 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i vi = -\sum_{j=1}^{m} \lambda_{n+j} wj \\ &\overset{(2)}{\Rightarrow} \lambda_1, \ldots \lambda_{n+m} = 0 \end{aligned}$$

An Stelle (1) wurde genutzt, dass nur die Null im Schnitt liegt, an Stelle (2), dass $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ jeweils Basen sind. Aus der Anzahl der Basisvektoren lässt sich nun schließen, dass

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2).$$

b) Die Ideen des ersten Teils versuchen wir nun auf den allgemeinen Fall anzuwenden. Sei dazu zunächst $\mathcal{B}_0 = \{b_1, \ldots, b_k\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$. Nach dem Basisergänzungssatz können wir diese zu Basen $\mathcal{B}_1 = \{b_1, \ldots, b_k, v_1, \ldots, v_n\}$ von U_1 sowie $\mathcal{B}_2 = \{b_1, \ldots, b_k, w_1, \ldots, w_m\}$ von U_2 ergänzen. Wir wollen nun zeigen, dass

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = \{b_1, \ldots, b_k, v_1, \ldots, v_n, w_1, \ldots, w_m\}$$

eine Basis des Summenraumes $U_1 + U_2$ ist. Um zu zeigen, dass $\mathcal{B}$ ein Erzeugendensystem von $U_1 + U_2$ ist, betrachten wir (mit $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+n}, \lambda'_1, \ldots \lambda'_{k+m} \in \mathbb{K}$):

$$\begin{aligned}
v \in U_1 + U_2 \Rightarrow \exists v_1 \in U_1, v_2 \in U_2 : v = v_1 + v_2 \\
\Rightarrow v &= \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{k} \lambda_{k+j} v_j\right) + \left(\sum_{j=1}^{k} \lambda'_j b_j + \sum_{j=1}^{m} \lambda'_{k+j} w_j\right) \\
\Leftrightarrow v &= \sum_{j=1}^{k} (\lambda_j + \lambda'_j) b_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{k+j} v_j + \sum_{j=1}^{m} \lambda'_{k+j} w_j \\
\Rightarrow v &\in span(\mathcal{B})
\end{aligned}$$

Den Unabhängigkeitsbeweis führen wir nach der bekannten Definition der linearen Unabhängigkeit. Sei also mit allen allen Koeffizienten aus $\mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j v_j + \sum_{j=1}^{m} \lambda''_j w_j = 0 \\
\Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j v_j = -\sum_{j=1}^{m} \lambda''_j w_j =: v_0
\end{aligned}$$

Da es für v_0 eine Darstellung aus $\mathcal{B}_1$ und eine aus $\mathcal{B}_2$ gibt, gilt $v_0 \in U_1 \cap U_2$. Das wiederum heißt:

$$\exists \alpha_1, \ldots \alpha_k \in \mathbb{K} : v_0 = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j$$

und wegen der verschiedenen Darstellungen von v_0 gilt nun offenbar:

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j = -\sum_{j=1}^{m} \lambda''_j w_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} \alpha_j b_j + \sum_{j=1}^{m} \lambda''_j w_j = 0$$

Da $\mathcal{B}_2$ eine Basis ist, folgt daraus, dass alle $\lambda''_j = 0$ sind. Dann ist also $v_0 = 0$ und somit

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j b_j + \sum_{j=1}^{n} \lambda'_j v_j = 0$$

Da aber $\mathcal{B}_1$ eine Basis ist, folgt direkt, dass alle λ_j sowie alle λ'_j gleich 0 sind und deshalb ist $\mathcal{B}$ eine linear unabhänige Menge. Es folgt insgesamt der zu beweisende Dimensionssatz.

(Wer zuerst b) gelöst hat, konnte a) als Sonderfall betrachten.)