Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

2. Übung zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 2. November

1. Aufgabe *Eine Charakterisierung surjektiver Abbildungen.* (4)
Es sei $f\colon M \to N$ eine Abbildung. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

(i) Für alle $A \subset N$ gilt $f(f^{-1}(A)) = A$.

(ii) Die Abbildung f ist surjektiv.

2. Aufgabe *Permutationen.* (4)
Es sei $M := \{\emptyset, 1, \{2, 3\}\}$.

a) Geben Sie alle Bijektionen $\pi\colon M \to M$ an.

b) Für welche dieser Bijektionen gilt $\pi^3 := \pi \circ \pi \circ \pi = \mathrm{id}_M$?

3. Aufgabe *Die Mächtigkeit der Potenzmenge.* (4)
Für eine Menge M und eine Abbildung $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ definieren wir

$$A_f := \{x \in M\colon x \notin f(x)\}\,.$$

a) Bestimmen Sie A_f für $M = \{0, 1, 2, 3\}$ und eine von Ihnen gewählte injektive Funktion f.

b) Zeigen Sie, dass für beliebiges M und $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ stets $A_f \notin \operatorname{Bild} f$ gilt.

c) Folgern Sie aus (b), dass $|M| \neq |\mathcal{P}(M)|$ für jede Menge M.

4. Aufgabe *Eine Gruppe von Permutationen von $\mathbb{Z}$.* (4)
Für $m \in \mathbb{Z}$ definieren wir Abbildungen

$$\begin{aligned} s_m, r_m \colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ s_m(n) &= m + n \\ r_m(n) &= m - n \end{aligned}$$

und setzen $D := \{r_m \colon m \in \mathbb{Z}\} \cup \{s_m \colon m \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass $(D, \circ)$ eine Gruppe ist. Dabei bezeichne $\circ$ das Hintereinanderausführen von Abbildungen. Ist diese Gruppe abelsch?

Allgemeine Hinweise

Die Abgabe erfolgt in Gruppen, die zwei Leute umfassen sollen und nicht mehr als zwei Leute umfassen dürfen.
Bitte vermerken Sie den Termin Ihres Tutoriums auf der Abgabe.