Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

3. Übung zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 9. November

1. Aufgabe *Gruppenhomomorphismen.* (4)
Mit

$$\begin{aligned} s_m, r_m \colon \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ s_m(n) &= m + n \\ r_m(n) &= m - n \end{aligned}$$

und $D := \{r_m \colon m \in \mathbb{Z}\} \cup \{s_m \colon m \in \mathbb{Z}\}$ ist $(D, \circ)$ eine Gruppe. Entscheiden Sie (mit Begründung, das heißt Beweis oder Widerlegung), welche der folgenden zwei Abbildungen Gruppenhomomorphismen sind.

$$\begin{aligned} f \colon (D, \circ) &\to (\mathbb{Z}, +) \\ s_m &\mapsto m \\ r_m &\mapsto m \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g \colon (D, \circ) &\to (\{-1, +1\}, \cdot) \\ s_m &\mapsto 1 \\ r_m &\mapsto -1 \end{aligned}$$

Bemerkung. Die Gruppe D haben wir in einer früheren Aufgabe behandelt. Was dort über sie gezeigt wurde, kann benutzt werden.

2. Aufgabe *Surjektionen und Äquivalenzrelationen* (4)
Es sei $f \colon X \to Y$ eine surjektive Abbildung. Für $a, b \in X$ definieren wir

$$a \sim b \quad :\Longleftrightarrow \quad f(a) = f(b).$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Wir definieren

$$\begin{aligned} \hat{f} \colon X/{\sim} &\to Y, \\ [x]_\sim &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ wohldefiniert und eine Bijektion ist.

3. Aufgabe *Ein erster Schritt von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{Z}$. (4)
Wir definieren auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Relation

$$(a, b) \sim (a', b') \quad :\Longleftrightarrow \quad a + b' = a' + b.$$

a) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

b) Skizzieren Sie grafisch die Äquivalenzklassen von $\sim$.

c) Beweisen Sie, dass jede der Äquivalenzklassen einen Repräsentanten der Form $(a, 0)$ oder $(0, b)$ hat.

4. Aufgabe *Relationen* (4)
Finden Sie Beispiele für Relationen außerhalb der Mathematik, vorzugsweise solche, die auch für Schüler interessant sein könnten, die die folgenden Eigenschaften haben. Beschreiben Sie jeweils, warum sie die geforderten Eigenschaften haben, und weisen Sie gegebenenfalls auch auf Schwächen der Beispiele hin.

a) Eine Äquivalenzrelation. Beschreiben Sie für diese auch die Äquivalenzklassen.

b) Eine symmetrische, nicht transitive Relation. Geben Sie auch an, ob sie reflexiv ist.

c) Eine transitive, nicht symmetrische Relation. Geben Sie auch an, ob sie reflexiv ist.