Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

4. Übung zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 16. November

1. Aufgabe *Von* $\mathbb{N}$ *nach* $\mathbb{Z}$. (4)
Wir haben bereits gesehen, dass auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(a, b) \sim (a', b') \quad :\Longleftrightarrow \quad a + b' = a' + b$$

eine Äquivalenzrelation definiert wird. Auf $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ definieren wir die Addition

$$[(a, b)] + [(c, d)] := [(a + c, b + d)].$$

Zeigen Sie:

a) Die auf $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim$ definierte Addition ist wohldefiniert.

b) $((\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim, +)$ ist eine abelsche Gruppe.
(Das Nachprüfen von Assoziativität und Kommutativität geht ganz automatisch und darf weggelassen werden.)

c) Die Abbildung

$$\begin{aligned} \varphi\colon (\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\sim &\to \mathbb{Z} \\ [(a, b)] &\mapsto a - b \end{aligned}$$

ist wohldefiniert und ein Gruppenisomorphismus.

2. Aufgabe *Die Multipliation komplexer Zahlen.* (4)
Zur Definition komplexer Zahlen wird auf $\mathbb{R}^2$ die Multiplikation

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

definiert. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \cdot)$ eine Gruppe ist, indem Sie folgendes nachprüfen:

a) Die definierte Multiplikation ist assoziativ.

b) $(1, 0)$ ist neutrales Element.

c) Für $(a, b) \neq (0, 0)$ ist $\left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ invers zu (a, b).

Bemerkung. Dies ist ein Teil des in der Vorlesung nicht vollständig ausgeführten Beweises, dass die so definierten komplexen Zahlen einen Körper bilden. Diese Tatsache ist also nicht zu benutzen.

3. Aufgabe *Wann ist $\mathbb{Z}_m$ ein Körper?* (4)

a) Es sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass K *nullteilerfrei* ist, d.h. dass für alle $a, b \in K$ mit $ab = 0$ gilt, dass $a = 0$ oder $b = 0$.

b) Es sei $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ und m keine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_m$ (mit der üblichen Addition und Multiplikation) kein Körper ist.

c*) Es sei p eine Primzahl. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_p$ ein Körper ist.

Die letzte Teilaufgabe ist eine Zusatzaufgabe. Wenn Sie sie bearbeiten, dürfen Sie benutzen, was sie aus der Schule über natürliche Zahlen wissen. Damit können Sie dann zum Beispiel zunächst zeigen, dass $\mathbb{Z}_p$ nullteilerfrei ist, und daraus folgern, dass für jedes $a \in \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}$ die Abbildung $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $b \mapsto ab$ injektiv ist.

4. Aufgabe *Unterverktorräume* (4)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen des Vektorraums $\mathbb{R}^3$ Unterräume sind:

$$S = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \colon a - 2b + c = 0\right\}, \qquad T = \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \colon ac = 0\right\}.$$