Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

6. Übung zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 30. November

1. Aufgabe *Lineare Unabhängigkeit.* (4)
Es sei V ein K-Vektorraum, $r > 0$ und $v^1, \ldots, v^r \in V$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen.

a) Die Vektoren $v^1, \ldots, v^r$ sind linear unabhängig.

b) Für alle s mit $1 \leq s \leq r$ gilt $v^s \notin \operatorname{span}\{v^1, \ldots, v^{s-1}\}$.

c) Die Vektoren $v^1, \ldots, v^{r-1}$ sind linear unabhängig und $v^r \notin \operatorname{span}\{v^1, \ldots, v^{r-1}\}$.

Bemerkung. Ein System von 0 Vektoren ist linear unabhängig. Es ist $\operatorname{span} \emptyset = \{0\}$.

2. Aufgabe *Das Kreuzprodukt.* (4)
Für zwei Vektoren $w^1, w^2 \in \mathbb{R}^3$ definieren wir ihr *Kreuzprodukt* durch

$$w^1 \times w^2 := \begin{pmatrix} w_2^1 w_3^2 - w_3^1 w_2^2 \\ -w_1^1 w_3^2 + w_3^1 w_1^2 \\ w_1^1 w_2^2 - w_2^1 w_1^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Zeigen Sie:

a) Ist $\nu = w^1 \times w^2$, so ist $\nu_1 w_1^j + \nu_2 w_2^j + \nu_3 w_3^j = 0$ für $j = 1, 2$.

b) Es ist $\nu = w^1 \times w^2 \neq 0$ genau dann, wenn w^1, w^2 linear unabhängig ist.

Bemerkung. Im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ kann das Kreuzprodukt also benutzt werden, um einen Normalenvektor zu einer Ebene zu finden.

3. Aufgabe *Ebenen im* $\mathbb{R}^3$. (4)
Beschreiben Sie jede der beiden Ebenen $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$ durch eine lineare Gleichung und benutzen Sie diese Gleichungen, um den Schnitt der Ebenen zu bestimmen.

$$E_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \qquad E_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Aufgabe *Eine Hyperebene im* $\mathbb{R}^4$. (4)
Zeigen Sie, dass

$$H = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

eine Hyperebene im $\mathbb{R}^4$ ist (die drei Richtungsvektoren also linear unabhängig sind), und beschreiben Sie diese durch eine lineare Gleichung.