Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

7. Übung zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 7. Dezember

1. Aufgabe *Die Potenzmenge als $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum.* (4)
Es sei M eine Menge. Wir definieren

$$\begin{aligned} +\colon \mathcal{P}(M) \times \mathcal{P}(M) &\to \mathcal{P}(M) \\ A + B &:= (A \cup B) \setminus (A \cap B) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \cdot\colon \mathbb{Z}_2 \times \mathcal{P}(M) &\to \mathcal{P}(M) \\ 0 \cdot A &:= \emptyset \\ 1 \cdot A &:= A \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

a) Diese Definitionen machen $\mathcal{P}(M)$ zu einem $\mathbb{Z}_2$-Vektorraum.

b) Ist M endlich, so ist $\dim \mathcal{P}(M) = |M|$. Sonst ist $\dim \mathcal{P}(M) = \infty$.

2. Aufgabe *Ein Unterraum von $\mathbb{Z}_2^m$.* (4)
Es sei $m \in \mathbb{N}$ und $U := \{v \in \mathbb{Z}_2^m \colon |\{i\colon v_i = 1\}| \text{ ist gerade}\}$.

a) Zeigen Sie, dass U ein Unterrraum ist.

b) Geben Sie eine Basis von U an, und bestimmen Sie die Dimension von U.

3. Aufgabe *Basen von Unterräumen.* (2+4+2)
Bestimmen Sie Basen der folgenden Unterräume des $\mathbb{R}^4$:

$$U := \left\{v \in \mathbb{R}^4 \colon 4v_1 + 2v_2 - 3v_3 = 0\right\}, \quad V := \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \\ 13 \end{pmatrix} \right\},$$

$W := U \cap V$.