Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

8. Übung zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 14. Dezember

1. Aufgabe *Funktionsräume* (4)
Es sei K ein Körper und X eine Menge. Wir betrachten K^X, die Menge aller Funktionen von X nach K, und definieren

$$+\colon K^X \times K^X \to K^X \qquad \cdot\colon K \times K^X \to K^X$$
$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \qquad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

a) Zeigen Sie, dass K^X mit dieser Addition und Multiplikation ein K-Vektorraum ist.

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^\mathbb{R}$ Unterräume sind:

$$A := \{f\colon f \text{ ist differenzierbar}\} \qquad B := \{f\colon f(5) = f(7)\}$$
$$C := \{f\colon |f(x)| \leq |x\, f(1)| \text{ für alle } x\} \qquad D := \{f\colon f(5) = 7\}$$

(Aus der Analysis beziehungsweise der Schule bekannte Sachverhalte dürfen natürlich benutzt werden.)

2. Aufgabe *Folgenräume* (4)
Elemente des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ sind Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$, also Folgen reeller Zahlen. Wie üblich schreiben wir im folgenden a_n statt $a(n)$ für $a \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$.
Wir definieren $c_{00} := \left\{a \in \mathbb{R}^\mathbb{N}\colon \text{Es ex. } N \in \mathbb{N} \text{ mit } a_n = 0 \text{ für alle } n \geq N\right\}$ und setzen außerdem für $k \in \mathbb{N}$

$$e^k \in \mathbb{R}^\mathbb{N}, \quad e^k_n := \delta_{k\,n} := \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

a) c_{00} ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^\mathbb{N}$.

b) $\left\{e^k\colon k \in \mathbb{N}\right\}$ ist eine Basis von c_{00}.

c) c_{00} und $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ sind unendlich-dimensional.

3. Aufgabe *Zeilenstufenform: Wir rechnen.* (4)
Bringen Sie die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 19 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & -15 & 4 & 15 \\ 4 & 2 & 26 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 6 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

mit Hilfe elementarer Zeilenumformungen in Zeilenstufenform und bestimmen Sie den Zeilenrang der Matrix sowie eine Basis ihres Zeilenraums.

4. Aufgabe *Der Spaltenraum einer Matrix in Zeilenstufenform* (4)
Es sei $A \in K^{m\times n}$ eine Matrix, und es bezeichne $b^i \in \mathbb{R}^m$ die i-te Spalte von A. Wir bezeichnen mit $\mathrm{SR}(A) := \operatorname{span}\left\{b^1, \ldots, b^n\right\}$ den *Spaltenraum* von A und mit $\mathrm{sr}(A) := \dim \mathrm{SR}(A)$ den Spaltenrang von A.
Zeigen Sie: Ist A in Zeilenstufenform mit $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ wie in der Defnition der Zeilenstufenform, so bilden die Vektoren $b^{j_1}, b^{j_2}, \ldots, b^{j_r}$ eine Basis von $\mathrm{SR}(A)$ und ist $\mathrm{sr}(A) = \mathrm{zr}(A)$.

Bemerkung. Wir werden dies später benutzen, um zu zeigen, dass für beliebige Matrizen Zeilenrang und Spaltenrang übereinstimmen.