Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

9. Übung zur Vorlesung

# Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

**Abgabe: bis zum 21. Dezember**

**1. Aufgabe** *Der Kern ist invariant unter Zeilenumformungen.* (4)
Beweisen Sie: Sind $A, \tilde{A} \in K^{m\times n}$, $K$ ein Körper, und geht $\tilde{A}$ aus $A$ durch elementare Zeilenumformungen hervor, so ist $\ker A = \ker \tilde{A}$.

**2. Aufgabe** *Das Gaussverfahren angewandt.* (4)
Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 6 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4\times 5}.$$

Überführen Sie $A$ durch elementare Zeilenumformungen in normierte Zeilenstufenform und bestimmen Sie den Rang von $A$, Basen des Zeilenraums und des Spaltenraums von $A$, sowie eine Basis des Kerns von $A$.

**3. Aufgabe** *Ein LGS über verschiedenen Körpern.* (4)

a) Bestimmen Sie den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & & +2x_4 & = 0 \end{array}$$

mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Q}$.

b) Bestimmen Sie den Lösungsraum des linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & & +x_3 & +x_4 & = 0 \\ & x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 0 \\ x_1 & +2x_2 & & +2x_4 & = 0 \end{array}$$

mit $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{Z}_3$.

**4. Aufgabe** *Wer einen Hammer hat...* (4)

a) Es seien durch $u, v, x, y \in \mathbb{R}^2$, $v, y \neq 0$ die Geraden $G_1 = u + \mathbb{R}v$, $G_2 = x + \mathbb{R}y$ gegeben. Außerdem sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ u_1 & v_1 & x_1 & y_1 \\ u_2 & v_2 & x_2 & y_2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Ist $\lambda \in \ker A$ und $\lambda_1 \neq 0$, so ist auch $\lambda_3 \neq 0$ und

$$u + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} v = x + \frac{\lambda_4}{\lambda_3} y$$

ein Schnittpunkt von $G_1$ und $G_2$.

b) Benutzen Sie das Verfahren aus der ersten Teilaufgabe, um einen Schnittpunkt der Geraden $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 19 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ zu bestimmen.