Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

10. Übung zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 18. Januar

1. Aufgabe *Ein inhomogenes lineares Gleichungssystem* (4)
Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} 4x_1 & +6x_2 & & -3x_4 & =7 \\ 6x_1 & +9x_2 & +x_3 & -x_4 & =6 \\ 10x_1 & +15x_2 & -x_3 & -11x_4 & =\alpha \end{array}$$

lösbar? Was ist in diesem Fall der Lösungsraum?

2. Aufgabe *Lineare Abbildungen* (4)
Geben Sie jeweils ein Beispiel für eine lineare Abbildung mit den gegebenen Eigenschaften an, oder begründen Sie, warum es eine solche nicht gibt.

a) Eine lineare surjektive Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

b) Einen Isomorphismus $\mathbb{R}^2 \to \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \middle| x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \right\}$.

c) Eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, die injektiv aber nicht surjektiv ist.

d) Eine lineare Abbildung $c_{00} \to c_{00}$, die injektiv aber nicht surjektiv ist.
(c_{00} ist der Raum der abbrechenden reellen Folgen.)

3. Aufgabe *Der Vektorraum der Homomorphismen* (4)
Es seien K ein Körper, V und W K-Vektorräume und U ein Unterraum von V. Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen im allgemeinen Untervektorräume von $\mathrm{Hom}(V,W)$ sind:

$$\begin{aligned} X &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \colon \ker f \subseteq U\}\,, \\ Y &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \colon \ker f \supseteq U\}\,, \\ Z &:= \{f \in \mathrm{Hom}(V,W) \colon \ker f = U\}\,. \end{aligned}$$

4. Aufgabe *Trennung* (4)
Es sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und U ein Unterraum von V. Zeigen Sie:

a) Ist $v \in V \setminus U$, so existiert $\ell \in \mathrm{Hom}(V,K)$ mit $\ell(u) = 0$ für alle $u \in U$ und $\ell(v) \neq 0$.

b) Es existieren ein $m \in \mathbb{N}$ und ein $f \in \mathrm{Hom}(V,\mathbb{R}^m)$ mit $U = \ker f$.