Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

11. Übung zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 25. Januar

1. Aufgabe *Matrizenmultiplikation, Inverse einer Matrix* (4)
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie, falls existent, $(AB^{\mathrm{T}})^{-1}$ und $(AC^{\mathrm{T}})^{-1}$.

2. Aufgabe *Einschränkung einer linearen Abbildung* (4)
Es sei $\mathcal{B} = \{u^1, u^2, u^3\} \subset \mathbb{R}^4$ mit

$$u^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad u^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$U = \operatorname{span}(\mathcal{B})$, $f \in \operatorname{Hom}(U, \mathbb{R}^2)$ die Einschränkung $f := L(A)|_U$ und $\mathcal{E} = \{e^1, e^2\}$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

a) Bestimmen Sie $C := M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(f)$.

b) Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Ker} C$.

c) Begründen Sie Gleichung $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} A \cap U \subset \mathbb{R}^4$ und berechnen Sie eine Basis eine Basis von $\operatorname{Ker} A \cap U$ aus der, die Sie für $\operatorname{Ker} C$ erhalten haben.

3. Aufgabe *Darstellende Matrizen* (8)
Wir bezeichnen mit x^n die Funktion $x \mapsto x^n$ und definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{R}_{\leq n}[x] := \operatorname{span}\left\{x^0, x^1, \ldots, x^n\right\} \subset \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

den Raum der *reellen Polynome vom Grad höchstens* n. Hierbei bezeichnet x^0 die Funktion, die konstant 1 ist. Da die Funktionen x^k, $k \in \mathbb{N}$, linear unabhängig sind, ist $\dim(\mathbb{R}_{\leq n}[x]) = n + 1$.
Es seien $\mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_2$ die Basen $\mathcal{B}_1 = \left\{1, x, x^2, x^3\right\}$ und $\mathcal{B}_2 = \{1, x, x(x-1), x(x-1)(x-2)\}$ von $\mathbb{R}_{\leq 3}[x]$.

$$\begin{aligned} D\colon \mathbb{R}_{\leq 3}[x] &\to \mathbb{R}_{\leq 3}[x] \\ p(x) &\mapsto p(x+1) - p(x). \end{aligned}$$

(Um die Definition von D zu verdeutlichen: Ist beispielsweise p das Polynom $x^2 - 2x$, so ist $D(p)$ das Polynom $(x+1)^2 - 2(x+1) - (x^2 - 2x) = 2x - 1$. Dass D eine lineare Abbildung ist, braucht nicht geprüft zu werden.)

a) Bestimmen Sie eine der beiden Transformationsmatrizen $T_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_1}$ und $T_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_2}$.

b) Bestimmen Sie aus dieser die andere durch Matrixinversion.

c) Bestimmen Sie eine der beiden darstellenden Matrizen $M_{\mathcal{B}_1}^{\mathcal{B}_1}(D)$ und $M_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{B}_2}(D)$.

d) Bestimmen Sie aus den drei bisher bestimmten Matrizen die vierte durch Matrixmultiplikation.

e) Prüfen Sie das Ergebnis der zuletzt bestimmte Matrix durch direkte Rechnung.