Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Dr. Carsten Gräser, Dr. Carsten Schultz

Ferienzusatzzettel zur Vorlesung

Lineare Algebra I (lehramtsbezogen)

WS 2012/13

http://numerik.mi.fu-berlin.de/wiki/WS_2012/Vorlesungen/LineareAlgebraI_LA.php

Abgabe: bis zum 11. Januar 2013

1. Aufgabe *Jólasveinar.* (4)
Am 12. Dezember ärgert Stekkjastaur Isländer. Am 13. Dezember ärgert Giljagaur Isländer, am 14. Dezember Stúfur, am 15. Dezember Þvörusleikir, am 16. Dezember Pottaskefill, am 17. Dezember Askasleikir, am 18. Dezember Hurðaskellir, am 19. Dezember Skyrgámur, am 20. Dezember Bjúgnakrækir, am 21. Dezember Gluggagægir, am 22. Dezember Gáttaþefur, am 23. Dezember Ketkrókur, am 24. Dezember Kertasníkir.
Kein Isländer wird mehr als einmal geärgert.
Am 12. und 13. Dezember zusammen werden 15382 Isländer geärgert, am 13. und 14. 15577, am 14. und 15. 12801, am 15. und 16. 11667, am 16. und 17. 14666, am 17. und 18. 15612, am 18 und 19. 15225, am 19. und 20. 15227, am 20. und 21. 16502, am 21. und 22. 16542, am 22. und 23. 15331, am 23. und 24. 15177 und am 24. und 12. Dezember 15105.

a) Wie viele Isländer werden von jedem der Weihnachtsgesellen jeweils geärgert?

b) Wäre die Aufgabe auch dann eindeutig lösbar gewesen, wenn an Stelle der Summe für den 24. und 12. Dezember die Summe für den 24. und 13. Dezember angegeben worden wäre?

2. Aufgabe *Noch eine Gruppe.* (4)
Für $m, n \in \mathbb{Z}$ definieren wir Abbildungen

$$c_{m,n} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$c_{m,n}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} m + x \\ n + (-1)^m y \end{pmatrix}$$

und setzen $G := \{c_{m,n} \colon m, n \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie, dass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist. Ist diese Gruppe abelsch?

3. Aufgabe *Affine Unterräume zum Dritten.* (4)
Es seien V und W K-Vektorräume, $f \colon V \to W$ eine lineare Abbildung und $w \in W$. Zeigen Sie, dass $f^{-1}(\{w\})$ leer oder ein affiner Unterraum von V ist.

4. Aufgabe *Wieder Hyperebenen.* (6)

a) Es seien $u, v^1, v^2, v^3, v^4 \in \mathbb{R}^5$ die Vektoren

$$u = \begin{pmatrix} 15 \\ -77 \\ 13 \\ -27 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ -5 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 11 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

$E = u + \operatorname{span}\left\{v^1, v^2, v^3, v^4\right\}$ und $A \in \mathbb{R}^{4\times 5}$ die Matrix, deren Zeilen die Vektoren $v^1, \ldots, v^4$ sind.

Bringen Sie die Matrix A in Zeilenstufenform und benutzen Sie diese, um zu entscheiden, ob E eine Hyperebene ist. Falls ja, so bestimmen Sie den Kern von A und mit Hilfe des Ergebnisses eine E beschreibende Gleichung.

b) Ebenso, aber mit

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 19 \\ 15 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. Aufgabe *Der Spaltenraum.* (4)
Zeigen Sie:

a) Eine Teilmenge $U \subset K^m$ ist genau dann ein Unterraum, wenn ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ mit $U = \operatorname{SR}(A)$ existieren.

b) Ist $A \in K^{m\times n}$, $\operatorname{Rang} A = n$ und $b \in K^m$, so ist der affine Unterraum $\operatorname{SR}(A) - b$ genau dann ein Unterraum, wenn $A^1, \ldots, A^n, b$ linear abhängig sind.

6. Aufgabe *Eine Dimensionsformel.* (4)
Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, und $U_1, U_2 \subset V$ seien Unterräume. Zeigen Sie:

a) Ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so ist $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2$.

b) Es ist $\dim(U_1 + U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 \cap U_2)$.

Wir wünschen ein frohes Fest und einen guten Rutsch!

ALLGEMEINE HINWEISE

Alle auf diesem Zettel zu erreichenden Punkte sind Zusatzpunkte.