Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, R. Banisch, S. Winkelmann

Klausur zur Vorlesung
Numerik Stochastischer Prozesse
im WiSe 2012/2013

Name:____________________________ Matr.-Nr.:__________________

Studiengang:
◯ Mathematik ◯ Bioinformatik ◯ Informatik ◯ anderer:

Angestrebter Abschluß:
◯ Diplom ◯ Lehramt(Staatsexamen) ◯ anderer:
◯ Bachelor(Mono) ◯ Bachelor(Kombi, Lehramt) ◯ Master

Beschriften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, mit Ihrem Namen. Bitte heften Sie alle Blätter, die Sie abgeben wollen, nach der Klausur mit einem der bereitgestellten Hefter zusammen. Bitte benutzen Sie keinen Bleistift.

Wenn Sie Ihre Klausurergebnisse auf der Website der Vorlesung unter Ihrer Matrikelnummer nachlesen wollen, unterschreiben Sie bitte die folgende Erklärung:

Ich bin damit einverstanden, daß mein Ergebnis bei dieser Klausur unter meiner Matrikelnummer auf der Website zur Vorlesung veröffentlicht wird.

____________________________ Unterschrift

Aufgabe	1	2	3	$\sum$
Punkte				

Viel Erfolg!

Bearbeiten Sie **alle** der folgenden Aufgaben!

Aufgabe 1 (7 Punkte)
Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung auf $\mathbb{R}$ mit Startwert $B_0 = x \in \mathbb{R}$. Man betrachte ein Intervall (a, b), $a < b$, sowie die Austrittszeit aus diesem Intervall

$$\tau_{(a,b)} := \inf \{t \geq 0 : \ B_t \notin (a, b)\}$$

und ihren Erwartungswert

$$v(x) := \mathbb{E}_x(\tau_{(a,b)}) = \mathbb{E}(\tau_{(a,b)}|B_0 = x)$$

in Abhängigkeit des Startwertes.

a) Stellen Sie das zugehörige Randwertproblem auf.

b) Nutzen Sie das Randwertproblem, um einen analytischen Audruck für die Funktion $v(x)$ in Abhängigkeit von a und b herzuleiten. (Hinweis: Wählen Sie eine geeignete Ansatzfunktion, z.B. ein Polynom.)

c) Man setze $a = 0$ und betrachte $b \to \infty$. Was ergibt sich für die erwartete Austrittszeit in Abhängigkeit von $x \in (0, \infty)$?

Lösung:
a) Die Funktion v ist Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} (Lv)(x) &= -1, \qquad x \in (a, b), \\ v(x) &= 0, \qquad x \in \{a, b\}, \end{aligned}$$

wobei L der Generator des Prozesses ist, hier also $Lv = \frac{1}{2}v''$.
b) Aus $\frac{1}{2}v''(x) = -1 \ \forall x \in (a, b)$ folgt, dass v auf (a, b) ein Polynom zweiten Grades, also von der Form $v(x) = c_1x^2 + c_2x + c_3$ ist, wobei $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. Ableiten ergibt $v''(x) = 2c_1$ und somit $c_1 = -1$. Aus $v(a) = v(b) = 0$ folgt $-a^2 + c_2a + c_3 = 0$ und $-b^2 + c_2b + c_3 = 0$. Lösen des Gleichungssystems ergibt $c_2 = a + b$ und $c_3 = -ab$. Wir erhalten

$$v(x) = -x^2 + (a + b)x - ab \quad \text{für } x \in (a, b)$$

und $v(x) = 0$ sonst.
c) Für $a = 0$ ergibt sich $v(x) = -x^2 + bx \ \forall x \in (0, b)$. Für jedes fixe $x > 0$ konvergiert dieser Ausdruck gegen unendlich,

$$\lim_{b\to\infty} v(x) = \infty.$$

D.h., selbst für Werte nahe der Grenze $a = 0$, für die der Prozess intuitiv "schnell" aus der Menge $(0, b)$ austritt, ist die mittlere Austrittszeit ∞.

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Bestimmen Sie die Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{2}\sigma^2x^2\rho(x,t)\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu x\rho(x,t)\right), \quad \lim_{t\searrow 0}\rho(x,t) = \delta_a(x).$$

(Hinweis: Schreiben Sie zunächst die zughörige SDE auf.)

Lösung:
Die zugehörige SDE lautet

$$dX_t = \mu X_t\,dt + \sigma X_t\,dB_t, \quad X_0 = a$$

und beschreibt die geometrische Brownsche Bewegung. Die Lösung dieser SDE ist gegeben durch

$$X_t = a \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right),$$

was durch anwenden der Ito-Formel auf $X_t = f(t, B_t)$ mit $f(t, B_t) = a \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$ nachgeprüft werden kann.
Der Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ ist log-normalverteilt mit Erwartungswert $\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$ und Varianz σ^2, denn für $Y_t = \ln X_t$ gilt mit der Ito-Formel

$$dY_t = \frac{1}{X_t}\,dX_t - \frac{1}{X_t^2}\frac{\sigma^2}{2}X_t^2\,dt = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\,dB_t$$

und somit

$$Y_t = Y_0 + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t.$$

Die Lösung der gegebenen Fokker-Planck-Gleichung ist also gegeben durch die Dichte der Log-Normalverteilung

$$\rho(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sigma}\right)^2\right).$$

Aufgabe 3 (9 Punkte)
Gegeben sei der eindimensionale Ornstein-Uhlenbeck-Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ mit

$$dX_t = -\mu X_t\,dt + \sigma\,dB_t, \quad X_0 = x$$

und $\mu > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$.

a) Stellen Sie das Euler-Maruyama-Schema $(\tilde{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für den gegebenen Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ auf.

b) Sei $\Delta t \in (0, \frac{2}{\mu})$ die Schrittweite des Euler-Maruyama-Schemas. Bestimmen Sie die Verteilung von $\tilde{X}_n$ und deren Grenzwert für $n \to \infty$. (Hinweis: Bestimmen Sie $\tilde{X}_n$ rekursiv in Abhängigkeit von $\tilde{X}_0$ und berechnen Sie Erwartungswert und Varianz.)

c) Vergleichen Sie den Grenzwert aus b) mit den Parametern der invarianten Verteilung des Prozesses $(X_t)_{t\geq 0}$.

Lösung:
a) Die Iteration lautet

$$\tilde{X}_{n+1} = \tilde{X}_n - \mu\tilde{X}_n\Delta t + \sigma\Delta B_n, \quad \tilde{X}_0 = x$$

mit $\Delta B_n \sim N(0, \Delta t)$.
b) Rekursives Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{n+1} &= (1-\mu\Delta t)\tilde{X}_n + \sigma\Delta B_n \\
&= (1-\mu\Delta t)\big((1-\mu\Delta t)\tilde{X}_{n-1} + \sigma\Delta B_{n-1}\big) + \sigma\Delta B_n \\
&\vdots \\
&= (1-\mu\Delta t)^{n+1}\tilde{X}_0 + \sigma\sum_{k=0}^{n}(1-\mu\Delta t)^k\Delta B_{n-k}.
\end{aligned}$$

Damit ist $\tilde{X}_n$ als gewichtete Summe der normalverteilten ΔB_{n-k} wieder normalverteilt. Mit $\mathbb{E}(\Delta B_{n-k}) = 0$ für alle k und $0 < \Delta t < \frac{2}{\mu}$ folgt

$$\mathbb{E}(\tilde{X}_n) = (1 - \mu\Delta t)^n \tilde{X}_0 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

und, da die ΔB_{n-k} unabhängig sind,

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(\tilde{X}_n) &= \sigma^2 \sum_{k=0}^{n} (1 - \mu\Delta t)^{2k}\, \mathbb{V}(\Delta B_{n-k}) \\
&= \sigma^2 \sum_{k=0}^{n} (1 - \mu\Delta t)^{2k}\, \Delta t \\
&= \sigma^2 \Delta t\, \frac{1 - (1 - \mu\Delta t)^{2n}}{1 - (1 - \mu\Delta t)^2} \\
&\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sigma^2 \Delta t\, \frac{1}{1 - (1 - \mu\Delta t)^2} \\
&= \sigma^2\, \frac{1}{\mu(2 - \mu\Delta t)} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(1 - \frac{\mu}{2}\Delta t\right)^{-1} \\
&= \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(1 + \mathcal{O}(\Delta t)\right)
\end{aligned}$$

Für $n \to \infty$ und fixe Schrittweite $0 < \Delta t < \frac{2}{\mu}$ konvergiert die Verteilung von $\tilde{X}_n$ also gegen

$$N\left(0\,,\, \frac{\sigma^2}{2\mu} \left(1 - \frac{\mu}{2}\Delta t\right)^{-1}\right).$$

c) Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess $(X_t)_{t\geq 0}$ hat die invariante Verteilung

$$N\left(0\,,\, \frac{\sigma^2}{2\mu}\right),$$

siehe Vorlesungsunterlagen. Eine Konvergenz in Verteilung ist daher nur für $\Delta t \to 0$ gegeben.

Ende der Klausuraufgaben