Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, A. Papke

Musterlösung zur Klausur
Analysis II (lehramtsbezogen)
im WS 2013/2014

Teil I

Sofern nichts anderes angegeben ist, beziehen sich die Aussagen stets auf die natürliche Metrik $d(x,y) = |x-y|$ bzw. den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Für falsche Antworten werden **keine** Punkte abgezogen.

wahr	falsch	Aussage
✗		Ist $K \subset \mathbb{R}$ kompakt, so konvergiert jede Cauchyfolge in $(C(\mathbb{R}, K), \|\cdot\|_\infty)$.
	✗	Ist $(f_n)_n$ ein Folge stetiger Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, die im quadratischen Mittel gegen eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ konvergiert, so ist f stetig.
	✗	Konvergiert f_n punktweise gegen $f = 0$, dann konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ punktweise.
✗		Sei $f\colon [m,\infty) \to \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ monoton fallend. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} f(n)$ genau dann, wenn f auf $[m,\infty)$ uneigentlich integrierbar ist.
✗		Je zwei Stammfunktionen einer Funktion $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ unterscheiden sich nur um eine Konstante.
	✗	Gilt für eine Folge von Funktionen $f_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, dass $|f_n(x) - f(x)| \to 0$ $\forall x \in [a,b]$ und ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so gilt auch $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.
✗		Funktionen mit abzählbar vielen Unstetigkeitsstellen sind Regelfunktionen.
	✗	Das AWP $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}$, $y(0) = 0$ hat die eindeutige Lösung $y(x) = 0$.
✗		Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist die Funktion $g(y) = \int_a^y f(x)\,dx$ für alle $y \in (a,b)$ differenzierbar.
	✗	Ist $x_0 \in \mathbb{R}^2$ ein kritischer Punkt einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, an dem die Hessematrix gleich der Nullmatrix ist, so x_0 kein striktes Extremum sein.

Teil II
Bearbeiten Sie **genau zwei** der folgenden vier Aufgaben. Bitte machen Sie kenntlich, für welche Aufgaben Sie sich entschieden haben.

Aufgabe 1. *Gegeben sei die Folge $(f_n)_n$ von Funktionen*

$$f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto \begin{cases} 2n^2x & [0,1/(2n)) \\ 2n - 2n^2x & [1/(2n),1/n] \\ 0 & (1/n,1] \end{cases}$$

a) Berechnen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

b) Untersuchen Sie f_n auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz. Geben Sie gegebenenfalls den Grenzwert an.

Lösung.

a) Für alle n$\in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{1/(2n)} 2n^2x\,dx + \int_{1/(2n)}^{1/n} (2n-2n^2x)\,dx + \int_{1/n}^1 0\,dx \\ &= n^2x^2\Big|_0^{1/(2n)} + \left(2nx - n^2x^2\right)\Big|_{1/(2n)}^{1/n} \\ &= \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

b) Sei $x \in (0,1]$ fest. Dann ist $f_n(x) = 0$, sobald $n \geq 1/x$. Ferner ist $f_n(0) = 0$, und folglich konvergiert f_n punktweise gegen die Nullfunktion $f = 0$. Nach a) kann die Folge dann aber nicht mehr gleichmäßig konvergieren, denn die Integrale stimmen nicht überein:

$$0 = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n\,dx \neq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 2. *Bestimmen Sie die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems*

$$x'(t) = t - x(t), \quad x(0) = x_0\,,$$

so dass in der Darstellung der Lösung kein Integral mehr auftaucht. Welchen Wert muss $x_0 \in \mathbb{R}$ haben, damit $x(t)$ zur Zeit $t = 1$ den Wert 0 annimmt?

Lösung. Durch Variation der Konstanten erhält man sofort die Integraldarstellung der Lösung:

$$x(t) = e^{-t}x_0 + \int_0^t e^{-t+s}s\,ds\,.$$

Mit Hilfe von partieller Integration folgt dann

$$\begin{aligned}x(t) &= e^{-t}\left(x_0 + e^s s\Big|_0^t - \int_0^t e^s\,\mathrm{d}s\right) \\ &= e^{-t}x_0 + t - 1 + e^{-t}\,.\end{aligned}$$

Für die Bedingung $x(1) = 0$ muss $x_0 = -1$ sein.

Aufgabe 3. *Gegeben ist die Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Ist die Funktion stetig in $(0,0)$?

b) Zeigen Sie, dass f auf dem gesamten Definitionsbereich partiell differenzierbar ist.

Lösung.

a) Um Stetigkeit in $(0,0)$ zu zeigen, bieten sich Polarkoordinaten an: Mit $x = r\cos\phi$ und $y = r\sin\phi$ erhält man

$$\begin{aligned} f(r\cos\phi, r\sin\phi) &= r^2\cos\phi\sin\phi\frac{\cos^2\phi - \sin^2\phi}{\cos^2\phi + \sin^2\phi} \\ &= r^2\cos\phi\sin\phi(\cos^2\phi - \sin^2\phi). \end{aligned}$$

Wegen $|f(r\cos\phi, r\sin\phi)| \leq r^2$ erhält man

$$\lim_{r\to 0} |f(r\cos\phi, r\sin\phi)| = 0 \quad \forall\phi\,,$$

und das ist gerade $f(0,0)$.

b) Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist $x^2 + y^2 \neq 0$ und die Funktion ist als Komposition differenzierbarer Funktionen partiell differenzierbar. Insbesondere gilt

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,y_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y_0) - f(0,y_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hy_0}{h}\frac{h^2 - y_0^2}{h^2 + y_0^2} = \lim_{h\to 0} y_0\frac{h^2 - y_0^2}{h^2 + y_0^2} = -y_0,$$

bzw.

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,h) - f(x_0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x_0 h}{h}\frac{x_0^2 - h^2}{x_0^2 + h^2} = \lim_{h\to 0} x_0\frac{x_0^2 - h^2}{x_0^2 + h^2} = x_0.$$

Somit ist f auch in $(0,0)$ partiell differenzierbar (aber nicht total differenzierbar).

Aufgabe 4. *Bestimmen Sie die Maxima und Minima der Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - y^2$$

auf der Kreisscheibe

$$K = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq 1\right\}.$$

Hinweis: *Suchen Sie zunächst nach lokalen Extrema von f im Inneren von K und dann auf dem Rand (d.h. unter der Nebenbedingung $x^2 + y^2 = 1$).*

Lösung. Die Funktion f is stetig differenzierbar mit $\nabla f(x,y) = (2x, -2y)^T$. Der einzige kritische Punkt, an dem der Gradient verschwindet, ist $(x_0, y_0) = (0,0) \in K$. Das ist aber keine Extremstelle, sondern ein Sattelpunkt, denn die Hessematrix

$$\nabla^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

ist indefinit.

Um Extrema auf dem Rand von K zu finden, benutzen wir die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Dazu definieren wir die auf $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbare Funktion $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Die notwendige Bedingung für Extrema ist damit durch das Gleichungssystem

$$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla F(x,y)\,, \quad F(x,y) = 0\,.$$

gegeben. Konkret:

$$2x = \lambda 2x\,, \quad -2y = \lambda 2x\,, \quad x^2 + y^2 - 1 = 0\,,$$

mit den 4 Lösungen $(x,y,\lambda) = (\pm 1, 0, 1)$ und $(x,y,\lambda) = (0, \pm 1, -1)$.
Da der Rand von K als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ kompakt ist, nimmt die stetige Funktion f dort Maximum und Minimum an (wegen der Symmetrie der Funktion jeweils zweimal). Wegen

$$f(0,\pm 1) = -1 < f(\pm 1, 0) = 1$$

liegen die Minima bei $(0,\pm 1)$ die Maxima bei $(\pm 1, 0)$.

Teil III

Aufgabe 1. *Gegeben ist das inhomogene Anfangswertproblem*

$$x'(t) = \lambda x(t) + \phi(t)\,, \quad x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}\,.$$

Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig und $\phi\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ stetig. Wir nehmen an, dass ϕ selber Lösung der homogenen Gleichung $\phi' = \lambda \phi$ ist. Zeigen Sie, dass in diesem Fall

$$x(t) = e^{\lambda(t-t_0)} x_0 + (t - t_0)\phi(t)$$

die Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist.

Lösung. Ist $x(t)$ tatsächlich die Lösung, so ist sie nach den Voraussetzungen an λ und ϕ auch eindeutig. Zunächst überprüft man, ob der Anfangswert stimmt:

$$x(t_0) = e^{\lambda(t_0-t_0)} x_0 + (t_0 - t_0)\phi(t) = x_0\,.$$

Das tut er. Dann überprüft man, ob die Differentialgleichung erfüllt ist:

$$x'(t) = \lambda e^{\lambda(t-t_0)} x_0 + (t - t_0)\phi'(t) + \phi(t).$$

Das ist sie, denn mit $\phi'(t) = \lambda\phi(t)$ folgt

$$\begin{aligned} x'(t) &= \lambda e^{\lambda(t-t_0)} x_0 + (t - t_0)\lambda\phi(t) + \phi(t) \\ &= \lambda x(t) + \phi(t)\,, \end{aligned}$$

und das ist die DGL.

Aufgabe 2. *Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Ferner gelte*

$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx = 0$$

für jede stetige Funktion $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $g(a) = g(b) = 0$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$f(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b]\,.$$

***Hinweis:** Da f stetig ist, reicht es, die Aussage für alle $x \in (a,b)$ zu beweisen.*

Lösung. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es ein $x_0 \in (a,b)$ gäbe mit $f(x_0) = \xi > 0$ (analog für "$\xi < 0$"). Da f stetig ist, existiert eine Umbegung $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a,b)$ in der $f(x) > \xi/2$ ist. Sei nun g die stetige Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [a, x_0 - \delta] \\ g_1(x)\,, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 0\,, & x \in [x_0 + \delta, b]\,, \end{cases}$$

wobei $g_1 > 0$ sein soll, so dass g insgesamt stetig ist (z.B. die "Zeltfunktion"). Dann folgt aus der Monotonie und Positivität des Integrals, dass

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g(x)\,dx \geq \frac{\xi}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g_1(x)\,dx > 0\,,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist $f = 0$.