Institut für Mathematik
Freie Universität Berlin
C. Hartmann, A. Papke

Musterlösung zur Nachklausur Analysis II (lehramtsbezogen) im WS 2013/2014

Teil I

Sofern nichts anderes angegeben ist, beziehen sich die Aussagen stets auf die natürliche Metrik $d(x, y) = |x - y|$ bzw. den metrischen Raum $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt. Für falsche Antworten werden **keine** Punkte abgezogen.

wahr	falsch	Aussage
✗		Sie $\varepsilon > 0$. Die Folge der Partialsummen $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ konvergiert für $x \in [-1+\varepsilon, 1-\varepsilon]$ gleichmäßig gegen die Funktion $S(x) = (1-x)^{-2}$.
	✗	Sei $\varphi : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Abbildung mit der Eigenschaft $\lvert\varphi'(x)\rvert < 1$ für alle $x \in (a, b)$. Dann ist φ auf (a, b) kontrahierend.
	✗	Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit eindeutiger Nullstelle in $\mathbb{R}$. Dann konvergiert das Newton-Verfahren für alle Startwerte.
	✗	Stammfunktionen F von integrierbaren Funktionen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbar und es gilt $F' = f$.
	✗	Für jede Funktion f folgt aus $\int_0^\infty f(x)\, dx < \infty$ auch $\int_0^\infty \lvert f(x)\rvert\, dx < \infty$.
✗		Ist $q(x)$ ein Polynom vom Grad zwei oder höher, das in $[1, \infty)$ keine Nullstellen hat, so existiert das uneigentliche Integral $\int_1^\infty (q(x))^{-1}\, dx$.
	✗	Die quadratische Gleichung $x^2 + \alpha y^2 = 1 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ lässt sich an der Stelle $(x, y) = (1, 1)$ lokal nach y auflösen.
	✗	Konvergiert eine Folge stetiger Funktionen $f_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ im quadratischen Mittel gegen $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$, so konvergiert f_n auch punktweise gegen f.
	✗	Das AWP $ax''(s) + bx'(s) + cx(s) = 0$, $x(0) = x_0$, $x'(0) = y_0$ ist für alle Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R}$ und Anfangswerte $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.
✗		Die Funktion $f\colon [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto (x + 2)^{-1}$ hat auf $[0, \infty)$ genau einen Fixpunkt.

Teil II [12 Punkte]
Bearbeiten Sie **genau** drei der folgenden Aufgaben 1-4. Bitte machen Sie kenntlich, für welche Aufgaben Sie sich entschieden haben.

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.** *Berechnen Sie das Integral*

$$\int e^x \cos(x)\, dx.$$

Lösung. Zweifache partielle Integration liefert:

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x)\, dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\, dx \\ &= e^x (\sin(x) + \cos(x)) - \int e^x \cos(x)\, dx\,.\end{aligned}$$

Somit ist das Integral

$$\int e^x \cos(x)\, dx = \frac{1}{2} e^x (\sin(x) + \cos(x))\,.$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** *Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\frac{dx}{dt} = \exp(t + x), \quad x(1) = x_1\,,$$

so dass in der Darstellung der Lösung kein Integral mehr auftritt. Welchen Wert muss $x_1 \in \mathbb{R}$ haben, damit $x(t)$ zur Zeit $t = 2$ den Wert -1 annimmt?
Tipp: *Separationsansatz.*

Lösung. Mit Hilfe des Separationsansatz,

$$\int_{x_1}^{x(t)} e^{-x}\, dx = \int_1^t e^s\, ds,$$

findet man die Lösung

$$x(t) = -\ln\left(e + e^{-x_1} - e^t\right).$$

Aus der Bedingung $x(2) = -1$ ergibt sich damit

$$-1 = -\ln\left(e + e^{-x_1} - e^2\right) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = -2\,.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)**.** *Berechnen Sie alle Richtungsableitungen der Funktion*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

senkrecht zum Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$. An welchen Stellen verschwindet die Richtungsableitung, wo nimmt sie ihr Minimum und Maximum an?

Lösung. Wir definieren die Funktion $s(x, y) = x^2 + y^2$. Dann ist $S^1 = \{(x, y) : s(x, y) = 1\}$ und $\nabla s(x, y) \perp S^1$ für alle $(x, y) \in S^1$. Die Gradienten von f und s sind durch

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla s(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

gegeben. Sei nun $n = \nabla s / |\nabla s|$. Die Richtungsableitung von f in Richtung von ∇s ist demnach

$$D_n f(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot n(x, y) = 2x^2 - 2y^2\,, \quad (x, y) \in S^1.$$

$D_n f$ verschwindet für $x = y$ bzw. $x = -y$, wobei $y = 1/\sqrt{2}$ ist. Da $-1 \leq x, y \leq 1$ gilt, wird $D_n f$ maximal, falls $x = \pm 1$ und $y = 0$ und minimal, falls $x = 0$ und $y = \pm 1$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)**.** *Welches gleichschenklige Dreieck hat bei konstantem Umfang den größten Flächeninhalt?*
Hinweis: *Der Flächeninhalt sei A. Dann können Sie auch untersuchen, wann A^2 maximal ist.*

Lösung. Wir nennen die Grundseite des Dreiecks x und die Schenkel y. Flächeninhalt und Umfang sind dann durch $A(x,y) = x\sqrt{4y^2 - x^2}/4$ bzw. $U(x,y) = 2y + x$ gegeben. Gesucht ist das Maximum der Funktion (quadrierter Flächeninhalt des Dreiecks)

$$f(x,y) = A^2(x,y)$$

unter der Nebenbedingung $U(x,y) = c > 0$ (konstanter Umfang). Auflösen der Nebenbedingung und Einsetzen in f liefert die Funktion

$$F\colon (0, c/2) \to \mathbb{R}\,, \quad x \mapsto f\left(x, \frac{U-x}{2}\right) = -\frac{c}{8}x^3 + \frac{c^2}{16}x^2\,,$$

deren eindeutiges Maximum in $(0, c/2)$ man durch Ableiten und Nullsetzen der Ableitung findet:

$$F'(x) = -\frac{3c}{8}x^2 + \frac{c^2}{8}x = 0 \quad \Longrightarrow \quad x = \frac{c}{3}\,.$$

Also hat ein gleichschenkliges Dreieck bei konstantem Umfang den größten Flächeninhalt.

Alternativ lässt sich das Problem mit der Methode der Lagrangemultiplikatoren lösen, angewandt auf die Funktion $G(x,y,\lambda) = A^2(x,y) + \lambda(U(x,y) - c)$.

Teil III [10 Punkte]

Aufgabe 5 (5 Punkte)**.** *Untersuchen Sie die Lösung des Anfangswertproblems*

$$\frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x-1}\,, \quad x(0) \geq 1 \quad (t \geq 0)\,,$$

auf Existenz und Eindeutigkeit. Begründen Sie Ihre Aussage(n).

Lösung. Für $x > 1$ ist die rechte Seite der DGL lokal Lipschitz-stetig. Damit gibt es nach dem Satz von Picard-Lindelöf eine lokal eindeutige Lösung; der Separationsansatz liefert

$$\int \frac{dx}{2\sqrt{x-1}} = \int dt, \quad \text{also} \quad x(t) = 1 + (t + x(0))^2\,.$$

Für $x = 1$ ist die rechte Seite der DGL nicht Lipschitz-stetig, damit ist der Satz von Picard-Lindelöf nicht anwendbar. (Lipschitzstetigkeit ist hinreichend, aber nicht notwendig für die Existenz und Eindeutigkeit.) Tatsächlich gibt es für $x(0) = 1$ neben der eben berechneten Lösung mit $x(t) = 1$ eine weitere Lösung. Für $x(0) = 1$ hat das AWP keine eindeutige Lösung.

Aufgabe 6 (5 Punkte)**.** *Gegeben sei eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Ferner gelte*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = 0$$

für jede Funktion $g \in C^2([a,b];\mathbb{R})$ mit $g(a) = g(b) = 0$. Zeigen Sie, dass dann $f = 0$.

Lösung. Wegen der Stetigkeit von f können wir uns auf das offene Intervall $(a,b) \subset [a,b]$ beschränken. Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, dass es ein $x_0 \in (a,b)$ gibt mit $f(x_0) = \xi > 0$ (analog für "$\xi < 0$"). Da f stetig ist, existiert eine Umgebung $(x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (a,b)$, in der $f(x) > \xi/2$ ist. Sei nun g die zweimal stetig differenzierbare Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in [a, x_0 - \delta] \\ g_1(x)\,, & x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \\ 0\,, & x \in [x_0 + \delta, b]\,, \end{cases}$$

mit

$$g_1(x) = e^{-1/(\delta - |x - x_0|^2)}\,.$$

(Das ist sogar eine C^∞-Funktion.) Wegen der Monotonie und Positivität des Integrals gilt dann

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g(x)\,dx \geq \frac{\xi}{2} \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g_1(x)\,dx > 0\,,$$

im Widerspruch zur Voraussetzung. Folglich ist $f = 0$.