Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

1. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 30. Oktober 2013, 15 Uhr

1. Aufgabe (Umgekehrte Dreiecksungleichung, 4 Punkte)
Sei X ein normierter Raum mit allgemeiner Norm $\|\cdot\|$. Beweisen Sie die umgekehrte Dreiecksungleichung

$$\|x-y\| \geq \big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \quad \text{für alle } x, y \in X.$$

2. Aufgabe (Einheitskugeln, 4 Punkte)
Die offene Einheitskugel bzgl. der p-Norm ist

$$B_{1,p} := \{x \,|\, x \in \mathbb{R}^2,\ \|x\|_p < 1\}.$$

Zeichnen Sie $B_{1,p}$ und $\overline{B_{1,p}}$, die abgeschlossene Einheitskugel, für $p \in \{1, 2, 4, \infty\}$. Sind sie jeweils kompakt?

3. Aufgabe (Folgenkonvergenz, 4 Punkte)
Betrachten Sie für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{natürliche Metrik:} \quad d_1(x,y) := |x-y|,$$

$$\text{diskrete Metrik:} \quad d_2(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y \\ 1 & \text{für } x \neq y \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass alle bzgl. d_2 konvergenten Folgen auch bzgl. d_1 konvergieren, aber nicht umgekehrt (Hinweis: Charakterisieren Sie dazu die bzgl. d_2 konvergenten Folgen).

b) Ist $(\mathbb{R}, d_i(x,y))$, $i = 1, 2$, ein normierter Vektorraum?

4. Aufgabe (Vektorräume, 4 Punkte)
l^∞ ist die Menge der beschränkten Folgen in $\mathbb{R}$:

$$l^\infty := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, a_n \in \mathbb{R},\ \exists C > 0 \ :\ |a_n| \leq C < \infty \ \ \forall n \right\}.$$

Die Folgenräume l^p auf $\mathbb{R}$ mit $0 < p < \infty$ sind definiert als

$$l^p := \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, a_n \in \mathbb{R},\ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^p < \infty \right\}.$$

a) Zeigen Sie, dass l^1 ein Vektorraum ist. Was ist mit l^∞?

b) Sei c der Raum aller konvergenten Folgen, c_0 der Raum aller gegen 0 konvergenten Folgen. Zeigen Sie: c und c_0 sind Untervektorräume von l^∞.