Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

9. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 22. Januar 2014, 15 Uhr

1. Aufgabe (Höhenlinien, 4 Punkte)

a) Diskutieren Sie die Höhenlinien der Funktion

$$F : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto xye^{-x-y}\,.$$

b) Seien $\phi : I \to J$ und $\psi : J \to I$ differenzierbare Funktionen. In welchen Rechtecken $I \times J \subset \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ lassen sich die Mengen

$$\{(x, y) \in I \times J : F(x, y) = c\}$$

in der Form

$$\{(x, y) \in I \times J : y = \phi(x)\}, \quad \text{bzw.} \quad \{(x, y) \in I \times J : x = \psi(y)\},$$

darstellen?

2. Aufgabe (Lokale vs. globale Umkehrbarkeit, 4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $(r, \phi) \mapsto (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Beweisen Sie die Aussage: "Die Abbildung f bildet $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ ab, f ist aber nicht global injektiv."

3. Aufgabe (Extremwertprobleme, 4 Punkte)
Beweisen Sie:

a) Unter allen umfangsgleichen Rechtecken hat das Quadrat den größten Inhalt.

b) Unter allen flächengleichen Rechtecken hat das Quadrat den kleinsten Umfang.

Tipp: Sie können die Methode der Lagrange-Multiplikatoren benutzen.

4. Aufgabe (Lineare Regression, 4 Punkte)
Gegeben seien Datenpunkte $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2, i = 1, \ldots, N$. Gesucht ist eine lineare Funktion $f(x) = mx + b$, die die Datenpunkte möglichst gut repräsentiert.

a) Stellen Sie ein geeignetes Minimierungsproblem auf, aus dem m und b bestimmt werden können. (Hinweis: Methode der kleinsten Quadrate)

b) Berechnen Sie die Koeffizienten m und b.

c) Zeigen Sie, dass die Wahl von m und b im Sinne des Minimierungsproblems aus a) optimal ist. (Hinweis: Berechnen Sie die Hessematrix der zu minimierenden Funktion und zeigen Sie, dass sie positiv definit ist.)

d) In einem Experiment sind die Kraft F und Auslenkung Δx einer Feder bestimmt worden. Berechnen Sie die optimalen Parameter für eine Ausgleichsgerade.

Δx [cm]	F [N]
1	2
2	3
3	6
4	7