Fachbereich Mathematik & Informatik
Freie Universität Berlin
Carsten Hartmann, Ariane Papke

2. Übung zur Vorlesung

Analysis II

Wintersemester 13/14

Abgabe bis Mittwoch, 6. November 2013, 15 Uhr

1. Aufgabe (Normierter Vektorraum, 4 Punkte)
Sei K kompakt. Zeigen Sie, dass $(C(K,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein normierter Vektorraum ist, also auch ein metrischer Raum.

2. Aufgabe (Satz von Dini, 4 Punkte)
Satz von Dini
Sei M eine Menge und $f_n : M \to \mathbb{R}$ eine Folge stetiger Funktionen, die punktweise gegen eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ konvergiert. Wenn zusätzlich M kompakt ist und $(f_n)_n$ monoton gegen eine stetige Funktion f konvergiert, so konvergiert $(f_n)_n$ auch gleichmäßig gegen f.

Zeigen Sie, dass der Satz jeweils ohne die folgende Voraussetzung nicht anwendbar ist:

a) Stetigkeit von f

b) Monotonie der $(f_n)_n$

c) Kompaktheit von M

Finden Sie dazu Gegenbeispiele.

3. Aufgabe (Gleichmäßige Konvergenz, 4 Punkte)
Zeigen Sie: Eine Funktionenfolge $(f_n)_n$ konvergiert gleichmäßig gegen f genau dann, wenn $\|f_n - f\|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.

4. Aufgabe (Differenzierbarkeit, 4 Punkte)
Finden Sie ein Gegenbeispiel zu der folgenden Aussage:
Sei $(f_n)_n$ eine Folge von stetig differenzierbaren Funktionen die gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist die Grenzfunktion f differenzierbar.